IDENTIFICACIÓN DE GRUPOS SOCIALES MEDIANTE LA AGREGACIÓN DE VALORACIONES INDIVIDUALES

DE ANDRÉS CALLE, Rocío
Departamento de Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
correo-e: rocioac@eco.uva.es

GARCÍA LAPRESTA, José Luis
Departamento de Economía Aplicada
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Valladolid
correo-e: lapresta@eco.uva.es

RESUMEN

El problema de la cualificación e identificación de los individuos pertenecientes a un grupo es uno de los más recientes problemas abordados desde la teoría de la elección social. En este trabajo se trata este asunto desde la perspectiva de la lógica difusa, teniendo en cuenta tanto la opinión de cada individuo sobre el resto de los agentes como la propia opinión sobre sí mismo, en todos los casos permitiendo graduar las valoraciones en el intervalo unidad. Para realizar este estudio se han utilizado reglas de elección independientes basadas en medias cuasiaritméticas ponderadas, de forma que la selección del grupo de individuos cualificados se lleva a cabo teniendo en cuenta las valoraciones individuales. Con objeto de considerar diversos grados de liberalismo en las reglas de elección, se ha introducido un parámetro que recoge la mayor o menor adherencia a este principio. En el trabajo se demuestran las principales propiedades de las reglas de elección propuestas.

Palabras clave: Elección Social, liberalismo, medias cuasiaritméticas ponderadas, funciones de elección.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se aborda el problema de cómo decidir qué agentes de un grupo satisfacen un determinado atributo, teniendo en cuenta las opiniones que los propios individuos tienen sobre ellos mismos y sobre los demás miembros del colectivo. Uno de los orígenes de este tipo de problemas se basa en la identificación de los miembros de un colectivo respecto de atributos religiosos y étnicos: ¿Quién es judío? (Kasher (1993)). Posteriormente, Kasher – Rubinstein (1997), Samet – Schmeidler (2003), Billot (2003) y Dimitrov – Sung – Xu (2003) analizan este mismo problema desde la perspectiva de la Teoría de la Elección Social, proporcionando caracterizaciones axiomáticas de varias reglas de decisión, entre las cuales caben destacar las liberales, las dictatoriales, las oligárquicas y las de consentimiento.

El problema mencionado puede generalizarse a muy diversos atributos, en particular a la selección de expertos dentro de un grupo, a partir de las opiniones de los propios miembros del colectivo. Se ha de señalar que los trabajos mencionados abordan la cuestión desde una perspectiva dicotómica, es decir, los agentes únicamente pueden opinar de forma extrema, señalando qué individuos satisfacen o no un determinado atributo.

En este trabajo trataremos el problema desde el punto de vista de la lógica difusa. Los agentes evalúan el cumplimiento del atributo considerado, para cada uno de los individuos y sobre sí mismo, mediante valores numéricos entre 0 y 1. Dicho de otra forma, cada agente aporta con su opinión un subconjunto difuso del conjunto de agentes. A partir de esta información se trata de obtener un nuevo subconjunto difuso agregado, de manera que el proceso de agregación respete algunos principios básicos, que permita a tal subconjunto difuso representar adecuadamente las opiniones individuales en una única opinión colectiva.

A la vista de esta nueva información se abre un nuevo proceso, ahora de *desfuzyficación*, con objeto de tomar una decisión final sobre qué agentes son seleccionados respecto del atributo considerado: en el ejemplo apuntado, los expertos que cuentan con el beneplácito interno del colectivo de agentes. Para ello hemos considerado α-cortes del subconjunto difuso agregado, que pueden entenderse como niveles de cualificación a exigir para llevar a cabo la tarea a desempeñar.

Para llevar a cabo la primera tarea de agregación hemos considerado reglas graduales independientes, las cuales permiten obtener una opinión colectiva sobre cada agente teniendo en cuenta las opiniones de todos los individuos sobre aquél que se evalúa. Este proceso equivale a disponer de tantos operadores de agregación como agentes haya. Una vez establecido el marco general, hemos utilizado como operadores de agregación una clase de medias cuasiaritméticas ponderadas, las cuales permitirán graduar diferentes tipos de liberalismo con la ayuda de un parámetro. Dicho liberalismo permitirá reflejar la importancia que se quiera dar a la opinión que cada individuo tenga sobre sí mismo, según el tipo de problema decisional abordado. Algunos estudios sobre medias cuasiaritméticas ponderadas y operadores de agregación pueden ser encontrados en Aczél (1996, 1987), Aczél – Alsina (1987), Bullen – Mitrinovic – Vasic (1988), Ovchinnikov (1990), Fodor – Roubens (1994) y Calvo – Kolesárova – Komorníková – Mesiar (2002), entre otros.

Tanto en la primera fase del proceso de decisión, recién expuesto, como en la segunda, basada en reglas de decisión asociadas a las reglas graduales independientes, se lleva a cabo un análisis de las propiedades (las demostraciones no se incluyen por motivos de espacio).

El trabajo esta organizado de la siguiente forma. La Sección 2 se dedica a las reglas graduales independientes, operadores de agregación y medias cuasiaritméticas ponderadas. En la Sección 3 consideramos la clase de medias cuasiaritméticas ponderadas que permite abordar los diferentes grados de liberalismo. La Sección 4 está dedicada a las reglas de decisión asociadas a las reglas graduales independientes. La Sección 5 contiene un ejemplo que ilustra el proceso y, finalmente, se presentan algunas conclusiones.

2. REGLAS GRADUALES INDEPENDIENTES

Supongamos que un determinado grupo de agentes deben decidir qué miembros son adecuados para llevar a cabo una tarea determinada que exige determinadas cualidades. Dado que tal atributo es vago, cada uno de los agentes podrá opinar de forma gradual sobre sí mismo y sobre el resto de los individuos, mediante valores numéricos en el intervalo unidad. La agregación de estas valoraciones individuales se llevará a cabo mediante reglas graduales, las cuales asignarán una valoración colectiva entre 0 y 1 sobre cada agente, teniendo en cuenta las opiniones individuales. Se supondrá que estas reglas graduales son independientes, en el sentido de Samet – Schmeidler (2003), de tal manera que sólo se consideran las opiniones sobre el individuo a evaluar y no otras, por ser irrelevantes.

Notación. Sea $N = \{1,\ldots,n\}$ el conjunto de individuos pertenecientes a un grupo, y 2^N el conjunto potencia de *N*, i.e., el conjunto de todos los subconjuntos de *N*. Se utilizará negrita para denotar los vectores en $[0,1]^n$: $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$, $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$. Dados dos vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in [0,1]^n$, con $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ denotamos $x_i \geq y_i$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dada una biyección $\pi : N \to N$, con $\pi(\mathbf{x})$ denotamos $\left(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}\right)$. Un perfil *P* es una matriz $n \times n$ con coeficientes en el intervalo $[0,1]$,

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix},$$

donde P_{ij} es la valoración que el individuo *i* da sobre el individuo *j* en cuanto a su grado de cumplimiento del atributo fijado. De esta forma, cada fila *i* en dicho perfil *P* describe las valoraciones del individuo *i* sobre el resto de los agentes, incluido él mismo. Cada columna *j* de dicho perfil muestra las valoraciones acerca del individuo *j*, incluida la que tiene sobre sí mismo. El conjunto de perfiles, $M_{n\times n}([0,1])$, está formado por todas las posibles matrices de orden $n \times n$ con coeficientes en el intervalo $[0,1]$.

Definición 1. Una *regla gradual* es una función $f : M_{n\times n}([0,1]) \to [0,1]^n$ que asocia a cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$ un vector

$$f(P) = \left(f_1(P),\ldots,f_n(P)\right) \in [0,1]^n,$$

donde $f_j(P)$ es la valoración colectiva obtenida por el individuo j de acuerdo con f en el perfil *P*.

En García Lapresta – Llamazares (2000, Theorem 1) se proporciona una condición necesaria y suficiente para la neutralidad en las reglas de agregación de preferencias difusas. Tomando esa misma idea podemos introducir un axioma de independencia para reglas graduales.

Definición 2. Una regla gradual $f : M_{n\times n}\left(\left[0,1\right]\right)\rightarrow\left[0,1\right]^n$ es *independiente* si para cada individuo $j\in N$ existe una función, denominada *operador de agregación*, $F_j : \left[0,1\right]^n \rightarrow \left[0,1\right]$, tal que

$$f_j\left(P\right)=F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right),$$

para cada perfil $P\in M_{n\times n}\left(\left[0,1\right]\right)$.

La independencia implica que la valoración colectiva de cada individuo es obtenida teniendo en cuenta únicamente las opiniones sobre el individuo evaluado. Entonces:

$$f\left(P\right)=\left(F_1\left(P_{11},\ldots,P_{n1}\right),\ldots,F_n\left(P_{1n},\ldots,P_{nn}\right)\right).$$

Así, considerar una regla gradual independiente es equivalente a tomar *n* operadores de agregación $F_1,\ldots,F_n$.

A continuación presentamos algunos conceptos acerca de los operadores de agregación incluidos en la definición de las reglas graduales independientes.

Definición 3. Sea $F:\left[0,1\right]^n \rightarrow \left[0,1\right]$ un operador de agregación:

1. F es *unánime* si para todo $t\in\left[0,1\right]$: $F\left(t\cdot\mathbf{1}\right)=t$.

2. F *es anónimo* si para toda biyección $\pi : N\rightarrow N$ y todo $\mathbf{x}\in\left[0,1\right]^n$:

$$F\left(\pi\left(\mathbf{x}\right)\right)=F\left(\mathbf{x}\right).$$

3. F es *monótono* si para todo $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\left[0,1\right]^n$:

$$\mathbf{x}\geq\mathbf{y}\Rightarrow F(\mathbf{x})\geq F(\mathbf{y}).$$

4. F es *compensativo* si para todo $\mathbf{x}\in\left[0,1\right]^n$:

$$\min\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}\leq F\left(\mathbf{x}\right)\leq \max\left\{x_1,\ldots,x_n\right\}.$$

5. F es *auto-dual* si para todo $\mathbf{x} \in [0,1]^n$:

$$F(\mathbf{1}-\mathbf{x}) = 1 - F(\mathbf{x}).$$

Observación 1. Sea $F:[0,1]^n \to [0,1]$ un operador de agregación.

- Si F es compensativo, entonces F es unánime.
- Si F es monótono, entonces F es unánime si y sólo si F es compensativo.
- Si F es auto-dual, entonces $F(\mathbf{1}) = 1$ equivale a $F(\mathbf{0}) = 0$.

Definición 4. Dada una regla gradual independiente *f* con operadores de agregación asociados $F_1, \ldots, F_n$, diremos que f es *unánime*, *anónima*, *monótona, compensativa*, *auto-dual* o *continua* si $F_1, \ldots, F_n$ satisfacen las propiedades con el mismo nombre.

El anonimato es una propiedad muy restrictiva para abordar el liberalismo, ya que la valoración que cada individuo tiene sobre sí mismo puede tener un tratamiento diferenciado a la que el agente tiene sobre el resto de los agentes del grupo. Por esta razón hemos introducido una versión más débil del anonimato, en donde la simetría de las reglas graduales independientes ahora es sólo aplicable a las opiniones de aquellos individuos que no son evaluados en ese momento.

Definición 5. Tomando una regla gradual independiente *f* con operadores de agregación asociados $F_1, \ldots, F_n$, diremos que *f* es *débilmente anónima* si para todo $j \in N$ y toda biyección $\pi : N - \{j\} \to N - \{j\}$:

$$F_j\left(P_{\pi(1)j}, \ldots, P_{\pi(j-1)j}, P_{jj}, P_{\pi(j+1)j}, \ldots, P_{\pi(n)j}\right) = F_j\left(P_{1j}, \ldots, P_{(j-1)j}, P_{jj}, P_{(j+1)j}, \ldots, P_{nj}\right),$$

para todo perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$.

Obviamente, el anonimato implica el anonimato débil.

Una clase de operadores de agregación interesante para abordar el problema del liberalismo es la correspondiente a las medias cuasiaritméticas ponderadas. En primer lugar introducimos las medias cuasiaritméticas.

Definición 6. Sea una función $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ diremos que es un automorfismo de orden si es una función biyectiva y creciente.

De acuerdo con García Lapresta – Llamazares (2000, pp. 684-685), si φ es un automorfismo de orden, entonces φ es continuo, estrictamente creciente y verifica $\varphi(0)=0$ y $\varphi(1)=1$; además φ^{-1} también es un automorfismo de orden con las mismas propiedades.

Definición 7. Dado un automorfismo de orden $\varphi:[0,1]\to[0,1]$, la *media cuasiaritmetica asociada a* φ es el operador de agregación $F_\varphi:[0,1]^n\to[0,1]$ definido por:

$$F_\varphi(x_1,\dots,x_n)=\varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(x_1)+\cdots+\varphi(x_n)}{n}\right).$$

Es fácil comprobar que F_φ es siempre unánime, anónimo, monótono, compensativo y continuo. En García Lapresta – Llamazares (2001, pp. 471-473) se demuestra que para todo automorfismo de orden $\varphi:[0,1]\to[0,1]$, F_φ es auto-dual si y sólo si se verifica $\varphi(1-x)=1-\varphi(x)$ para todo $x\in[0,1]$. En este sentido, podemos decir que el automorfismo de orden φ es *auto-dual*. Resulta inmediato comprobar que si φ es auto-dual, entonces $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ y φ^{-1} es también auto-dual.

A pesar de que las medias cuasiaritméticas tienen buenas propiedades, el anonimato puede ser contraproducente en la modelización del liberalismo, dentro del marco de las reglas graduales independientes. Por esta razón, consideraremos medias cuasiaritméticas ponderadas que, si bien no son anónimas, cumplen algunas de las propiedades más interesantes de las medias cuasiaritméticas.

Definición 8. Sean $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ un automorfismo de orden y $\mathbf{w}=(w_1,\dots,w_n)\in[0,1]^n$ un vector de pesos tal que $w_1+\cdots+w_n=1$. La *media cuasiaritmética ponderada asociada a* φ *y* $\mathbf{w}$ es el operador de agregación $F_\varphi^{\mathbf{w}}:[0,1]^n\to[0,1]$ definido por:

$$F_{\varphi}^{\mathbf{w}}\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\varphi^{-1}\left(w_1\varphi\left(x_1\right)+\cdots+w_n\varphi\left(x_n\right)\right).$$

Resulta inmediato comprobar que $F_{\varphi}^{\mathbf{w}}$ es siempre unánime, monótono, compensativo y continuo. Además, si φ es auto-dual, entonces $F_{\varphi}^{\mathbf{w}}$ es también auto-dual; y $F_{\varphi}^{\mathbf{w}}$ es anónimo si y sólo si $w_i=\frac{1}{n}$ para todo $i\in\{1,\ldots,n\}$, es decir, $F_{\varphi}^{\mathbf{w}}$ es la media cuasiaritmética asociada a φ, $F_{\varphi}^{\mathbf{w}}$.

3. LIBERALISMO

A la hora de establecer qué individuos son adecuados respecto de un determinado atributo o tarea a desempeñar, el liberalismo extremo consiste en que la valoración colectiva de un determinado agente depende únicamente de la opinión que el propio agente tiene sobre sí mismo. En el otro extremo tendríamos el caso en el que no se tienen en consideración las opiniones que los agentes tienen sobre sí mismos.

Con el fin de plantear un modelo donde el liberalismo esté contemplado de forma gradual, a continuación se introduce, a modo de ejemplo, una clase de reglas graduadas independientes asociadas a una familia concreta de medias cuasiariméticas ponderadas.

Sea $\gamma\in[0,1]$ un parámetro. Para cada agente $j\in N$, consideramos el vector de pesos $\mathbf{w}=\left(w_1,\ldots,w_n\right)$ definido por:

$$w_i=\begin{cases}\gamma,\ si\ i=j,\\ \dfrac{1-\gamma}{n-1},\ si\ i\neq j.\end{cases}$$

Obsérvese que $\left(w_1,\ldots,w_n\right)\in[0,1]^n$ y $w_1+\cdots+w_n=1$.

En primer lugar tendremos en cuenta la media aritmética ponderada correspondiente asociada a $\mathbf{w}$ ($\varphi(x)=x$ para todo $x\in[0,1]$). Así, la valoración colectiva del agente *j* viene dada por:

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right)=\gamma\,P_{jj}+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}P_{ij} \qquad (1)$$

para todo perfil $P \in M_{n\times n}\left(\left[0,1\right]\right)$.

En los casos extremos de γ, hay claras interpretaciones en relación al liberalismo:

- Para $\gamma = 0$, la valoración colectiva acerca del agente j no tiene en cuenta la propia opinión del agente j sobre sí mismo y es obtenida como la media aritmética de las opiniones individuales de los agentes, exceptuando la del propio individuo evaluado:

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right) = \frac{1}{n-1}\sum_{i\neq j} P_{ij},$$

  para cada perfil $P \in M_{n\times n}\left(\left[0,1\right]\right)$.

- Para $\gamma = \frac{1}{n}$, la valoración colectiva sobre el individuo j es justamente la media aritmética de las opiniones de todos los agentes:

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right) = \frac{1}{n}P_{jj} + \frac{1}{n}\sum_{i\neq j} P_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{ij},$$

  para cada perfil $P \in M_{n\times n}\left(\left[0,1\right]\right)$.

  Ahora la opinión del individuo evaluado es una más y tiene la misma influencia que la del resto de los agentes sobre su propia valoración colectiva.

- Para $\gamma = 1$, la valoración colectiva sobre un agente queda determinada por la opinión que el propio agente tiene sobre sí mismo:

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right) = P_{jj},$$

  para cada perfil $P \in M_{n\times n}\left(\left[0,1\right]\right)$.

  En este caso carecen de importancia las opiniones que el resto de los agentes tienen sobre el individuo a evaluar y la regla gradual independiente asociada a $F_1,\ldots,F_n$ sería la más liberal de todas las de la clase presentada.

Ahora consideraremos un caso más general, en donde se utilizan medias cuasiaritméticas ponderadas.

Consideraremos de nuevo un parámetro $\gamma \in [0,1]$ y para cada individuo $j \in N$ sea $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ el vector de pesos:

$$w_i = \begin{cases} \gamma,\ si\ i = j, \\ \dfrac{1-\gamma}{n-1},\ si\ i \neq j. \end{cases}$$

Así, podemos definir:

$$F_j\left(P_{1j}, \ldots, P_{jj}, \ldots, P_{nj}\right) = \varphi^{-1}\left(\gamma\, \varphi\left(P_{jj}\right) + \frac{1-\gamma}{n-1} \sum_{i \neq j} \varphi\left(P_{ij}\right)\right) \qquad (2)$$

para cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$.

Proposición 1. Para cada automorfismo de orden $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ y $\gamma \in [0,1]$, las reglas graduales independientes asociadas a las medias cuasiaritméticas ponderadas definidas en (2) son unánimes, débilmente anónimas, monótonas, compensativas y continuas. Además, si φ es auto-dual, entonces la regla gradual asociada también es auto-dual.

4. REGLAS DE DECISIÓN

Las reglas graduales proporcionan una importante información acerca de los miembros de un colectivo, teniendo en cuenta las opiniones individuales de los agentes. Sin embargo, nuestra objetivo consiste en seleccionar de manera efectiva qué individuos van a formar parte de un determinado subgrupo, de acuerdo al atributo considerado. Para dar solución a este problema, hemos considerado una clase de reglas de decisión asociadas a cada regla gradual independiente. Esta clase está definida por medio de un parámetro que va a permitir usar diferentes umbrales de cualificación en la decisión colectiva.

Definición 9. Una *regla de decisión* es una aplicación $g : M_{n\times n}([0,1]) \to 2^N$ que asocia a cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$ un subconjunto de agentes $g(P) \subseteq N$.

Definición 10. Sea $g : M_{n\times n}([0,1]) \to 2^N$ una regla de decisión.

1. g es *independiente* si para todo par de perfiles $P, Q \in M_{n\times n}([0,1])$ y todo $j \in N$, tales que $P_{ij} = Q_{ij}$ para todo $i \in N$:

$$j \in g(P) \quad \Leftrightarrow \quad j \in g(Q).$$

2. g es *unánime* si para todo perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$ y todo $j \in N$:

$$\forall i \in N \ P_{ij} = 1 \quad \Rightarrow \quad j \in g(P).$$

3. g es *monótona* si para todo par de perfiles $P, Q \in M_{n\times n}([0,1])$ tales que $P_{ij} \le Q_{ij}$ para cualesquiera $i, j \in N$: $g(P) \subseteq g(Q)$.

4. g es *auto-dual* si para todo perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$ y todo $k \in N$:

$$k \in g(P) \ \Rightarrow \ k \notin g(Q),$$

donde $Q_{ij} = 1 - P_{ij}$ para todo $i, j \in N$.

5. g es *no-degenerativa* si para todo $j \in N$ existen perfiles $P, Q \in M_{n\times n}([0,1])$ tales que $j \in g(P)$ y $j \notin g(Q)$.

Definición 11. Sea $f : M_{n\times n}([0,1]) \to [0,1]^n$ una regla gradual y $\alpha \in [0,1]$. La α*-regla de decisión asociada a f* es la función $f^\alpha : M_{n\times n}([0,1]) \to 2^N$ definida por

$$f^\alpha(P) = \{ j \in N \mid f_j(P) \ge \alpha \},$$

para cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$.

Podemos observar que para cada perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$, se verifica $f^0(P) = N$, y si $0 \le \alpha \le \beta \le 1$, entonces $f^\beta(P) \subseteq f^\alpha(P)$.

Hemos de notar que el concepto de α-regla de decisión generaliza el de *reglas de consentimiento* de Samet – Schmeidler (2003) (en su caso para las valoraciones dicotómicas).

Observación 3. Dada una *regla gradual independiente* $f: M_{n\times n}([0,1]) \rightarrow [0,1]^n$ con operadores de agregación asociados $F_1,\ldots,F_n$ y $\alpha \in [0,1]$, la α*-regla de decisión* asociada con f viene definida por:

$$f^{\alpha}(P) = \left\{ j \in N \mid F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{nj}\right) \geq \alpha \right\},$$

para todo perfil $P \in M_{n\times n}([0,1])$. Obviamente f^{α} es una regla de decisión independiente para cada $\alpha \in [0,1]$.

En la siguiente proposición mostramos algunas propiedades que las reglas de decisión heredan de las reglas graduales independientes correspondientes.

Proposición 2. Sea $f: M_{n\times n}([0,1]) \rightarrow [0,1]^n$ una regla gradual independiente:

1. Si *f* es unánime, entonces f^{α} es unánime para todo $\alpha \in [0,1]$.
2. *f* es monótona si y solo si f^{α} es monótona para todo $\alpha \in [0,1]$.
3. Si *f* es auto-dual, entonces f^{α} es auto-dual para todo $\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right]$.

En el siguiente resultado se pone de manifiesto que las α-reglas de decisión asociadas a las medias cuasiaritméticas ponderadas definidas en (2) satisfacen algunas interesantes propiedades.

Proposición 3. Para cada automorfismo de orden $\varphi:[0,1] \rightarrow [0,1]$ y $\alpha,\gamma \in [0,1]$, las α-reglas de decisión asociadas a las reglas graduales independientes definidas por (2) son unánimes, débilmente anónimas y monótonas. Además, f^{α} es no degenerada para $\alpha > 0$ y auto-dual cuando $\varphi:[0,1] \rightarrow [0,1]$ es auto-dual y $\alpha > 0.5$.

5. EJEMPLO

Con el fin de mostrar cómo un grupo de individuos selecciona sus miembros cualificados respecto de un atributo, ilustramos el proceso mediante un ejemplo.

Supongamos el siguiente perfil:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{61} & \cdots & P_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.9 & 0 & 0.5 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 1 & 0 & 0.4 & 0.7 & 0.5 \\ 0.8 & 0.8 & 0 & 0.6 & 0.5 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 & 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.4 \\ 0.9 & 0.9 & 0.2 & 0.3 & 0.8 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 & 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix},$$

en donde seis individuos muestran sus opiniones sobre cada uno de los miembros de ese colectivo, incluida la que tienen sobre sí mismos.

Para obtener las valoraciones colectivas, consideramos la clase de reglas graduales independientes asociadas a las medias cuasiaritméticas introducidas en (2):

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right)=\varphi^{-1}\left(\gamma\,\varphi\left(P_{jj}\right)+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}\varphi(P_{ij})\right),$$

donde $\gamma\in[0,1]$ y $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ es un automorfismo de orden auto-dual. Una vez conocidas tales valoraciones colectivas, se procederá a seleccionar los individuos según diferentes α-reglas de decisión asociadas a las anteriores medias cuasiaritméticas ponderadas.

A continuación mostramos los resultados obtenidos respecto de dos automorfismos de orden, para diversos valores del parámetro γ y umbrales de cualificación α.

5.1 Primer caso. En primer lugar, por simplicidad, consideramos el automorfismo identidad, $\varphi(x)=x$, lo cual corresponde a agregar las opiniones individuales mediante las medias aritméticas ponderadas dadas en (1):

$$F_j\left(P_{1j},\ldots,P_{jj},\ldots,P_{nj}\right)=\gamma\,P_{jj}+\frac{1-\gamma}{n-1}\sum_{i\neq j}P_{ij}\,.$$

En la Tabla 1 mostramos los valores obtenidos por los operadores de agregación: $F_1,\ldots,F_6$ para cada columna del perfil P y para los diferentes valores del parámetro γ.

	Individuo j					
γ	1	2	3	4	5	6
0	0.7000	0.8000	0.1400	0.4600	0.5600	0.3400
0.2	0.7000	0.8400	0.1120	0.4480	0.6080	0.2920
0.4	0.7000	0.8800	0.0840	0.4360	0.6560	0.2440
0.6	0.7000	0.9200	0.0560	0.4240	0.7040	0.1960
0.8	0.7000	0.9600	0.0280	0.4120	0.7520	0.1480
1	0.7000	1.0000	0.0000	0.4000	0.8000	0.1000

Tabla 1. Valores obtenidos para $F_j(P_{1j},...,P_{6j})$.

En las siguientes tablas mostramos los resultados obtenidos para las diferentes α-reglas de decisión para diferentes valores del parámetro γ, entendiendo que 1 significa que el individuo en cuestión es seleccionado y 0 que no lo es.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	1
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	0	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 2. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	1
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 3. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0.2$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	1
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 4. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0.4$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	0
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 5. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0.6$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	0
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 6. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0.8$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	0
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0

Tabla 7. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 1$.

Según las anteriores tablas , tenemos la siguiente selección de individuos:

- $f^{0.2}(P) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ para $\gamma = 0, 0.2, 0, 4$

  $f^{0.2}(P) = \{1, 2, 4, 5\}$ para $\gamma = 0.6, 0.8, 1$

- $f^{0.4}(P) = \{1, 2, 4, 5\}$ para $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

- $f^{0.6}(P) = \{1, 2\}$ para $\gamma = 0$

  $f^{0.6}(P) = \{1, 2, 5\}$ para $\gamma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

- $f^{0.8}(P) = \{2\}$ para $\gamma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$

- $f^{1}(P) = \varnothing$ para $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

  $f^{1}(P) = \{2\}$ para $\gamma = 1$.

Luego, podemos concluir que los valores del parámetro γ y del umbral de cualificación α son determinantes a la hora de decidir qué agentes son seleccionados.

5.2 Segundo caso. Ahora consideramos el automorfismo de orden autodual

$$\varphi(x)=\begin{cases}2x^2 & \text{si } 0\le x<\frac{1}{2},\\ -2x^2+4x-1, & si\ \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$$

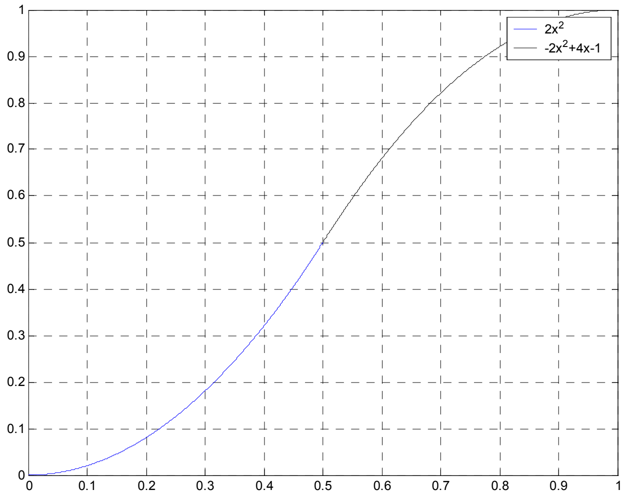

Figura 2. Grafica de φ.

El automorfismo inverso de φ viene dado por:

$$\varphi^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{2}}, & si\ 0\le x<\frac{1}{2},\\ \dfrac{2-\sqrt{2-2\text{x}}}{2}, & si\ \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$$

En la Tabla 8 mostramos los valores obtenidos por los operadores de agregación $F_1,\ldots,F_6$ para cada columna del perfil P y para diferentes valores del parámetro γ.

	Individuo j					
γ	1	2	3	4	5	6
0	0.6744	0.7809	0.1844	0.4669	0.5528	0.3550
0.2	0.6794	0.8040	0.1649	0.4543	0.5901	0.3206
0.4	0.6844	0.8303	0.1428	0.4414	0.6312	0.2821
0.6	0.6895	0.8614	0.1166	0.4280	0.6775	0.2375
0.8	0.6947	0.9020	0.0825	0.4142	0.7317	0.1822
1	0.7000	1.0000	0.0000	0.4000	0.8000	0.1000

Tabla 8. Valores obtenidos para $F_j(P_{1j},\ldots,P_{6j})$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	1
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	0	0
0.8	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 9. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	1
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	0	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 10. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0.2$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	1
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 11. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0.4$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	1
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 12. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0.6$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	1
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 13. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 0.8$.

α	Ind. 1	Ind. 2	Ind. 3	Ind. 4	Ind. 5	Ind. 6
0.2	1	1	0	1	1	0
0.4	1	1	0	1	1	0
0.6	1	1	0	0	1	0
0.8	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Tabla 14. Individuos seleccionados por $f^{\alpha}(P)$ para $\gamma = 1$.

Según las anteriores tablas , tenemos:

- $f^{0.2}(P) = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ para $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$

  $f^{0.2}(P) = \{1, 2, 4, 5\}$ para $\gamma = 1$
- $f^{0.4}(P) = \{1, 2, 4, 5\}$ para $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$
- $f^{0.6}(P) = \{1, 2\}$ para $\gamma = 0, 0.2, 04$

  $f^{0.6}(P) = \{1, 2, 5\}$ para $\gamma = 0.6, 0.8, 1$
- $f^{0.8}(P) = \varnothing$ para $\gamma = 0$

  $f^{0.8}(P) = \{2\}$ para $\gamma = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$
- $f^{1}(P) = \varnothing$ para $\gamma = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

De nuevo se observa que los valores del parámetro γ y del umbral de cualificación α son determinantes a la hora de decidir qué agentes son seleccionados.

Obviamente, valores crecientes de α hacen disminuir el conjunto de individuos seleccionados. Así mismo, valores crecientes de γ acarrean una mayor influencia de la opinión que cada individuo tiene sobre sí mismo. De hecho en el caso extremo de liberalismo, $\gamma = 1$, el automorfismo no juega ningún papel, ya que la valoración colectiva es la del propio individuo.

La influencia del automorfismo de orden se observa en tres casos:

1. Para $\gamma = 0.6, 0.8$, el sexto individuo no es seleccionado por $f^{0.2}$ en el primer automorfismo y, en cambio, sí lo es en el segundo.

2. Para $\gamma = 0.2, 0.4$, el quinto individuo es seleccionado por $f^{0.6}$ en el primer automorfismo y, en cambio, no lo es en el segundo.

3. Para $\gamma = 0$, el segundo individuo es seleccionado por $f^{0.8}$ en el primer automorfismo y, en cambio, no lo es en el segundo.

Esto es debido a que el segundo automorfismo penaliza las opiniones individuales inferiores a 0.5 y sobrevalora aquéllas que son superiores a 0.5. No obstante, se ha de tener en cuenta que, una vez obtenida la media aritmética de las opiniones individuales modificadas por el automorfismo, esta media se ve a su vez transformada por el automorfismo inverso que tiene efectos contrarios a los que producía a las opiniones individuales, puesto que ahora la media se ve penalizada o sobrevalorada si ésta es mayor o menor que 0.5, respectivamente.

CONCLUSIONES.

Uno de los problemas recientemente abordados en la Teoría de la Elección Social consiste en proponer y analizar procedimientos de selección de individuos en un grupo con relación a un determinado atributo. Los trabajos publicados sobre este aspecto de la toma de decisiones colectivas consideran que los agentes emiten sus opiniones sobre los miembros del grupo, incluidos ellos mismos, de forma dicotómica. Así cada uno de ellos divide el grupo en dos mitades: la formada por aquéllos a los que da su aprobación y la constituida por los individuos a los que desaprueba respecto del atributo considerado.

Dado que, por lo general, los atributos respecto de los que se juzga a los individuos son vagos e imprecisos, parece natural contemplar el problema en cuestión desde la lógica difusa en lugar de la clásica, demasiado rígida para abordar adecuadamente los juicios humanos. En el presente trabajo se toma como premisa que los individuos puedan matizar sus opiniones de forma gradual, asignando una valoración numérica en el intervalo unidad a cada uno de los miembros del grupo. Para agregar las opiniones individuales hemos considerado una clase de medias cuasiaritméticas ponderadas. Gracias a estos operadores de agregación, se construye una valoración colectiva sobre cada individuo en función de un parámetro que permite graduar la influencia de las opiniones que los individuos tienen sobre sí mismos en la valoración colectiva. Con ello se da cabida a diversos grados de liberalismo, lo cual permite abordar problemas de muy diversa naturaleza.

Una vez asignada una valoración colectiva a cada uno de los miembros del grupo, se hace necesario tomar una decisión final sobre qué individuos son seleccionados respecto del atributo en cuestión. Para ello hemos considerado reglas de decisión que, gracias a la utilización de umbrales de exigencia, permiten seleccionar a los individuos que alcanzan el nivel de cualificación deseado.

En el trabajo se demuestran varias propiedades, tanto de las reglas graduales que originan las valoraciones colectivas de los individuos, como de las reglas de decisión que seleccionan los miembros del grupo a partir de las valoraciones obtenidas por los individuos, así como de los niveles de cualificación exigidos. A pesar de que el proceso de decisión cuenta con buenas propiedades, un problema abierto consiste en lograr una caracterización axiomática que lo deslinde de otros posibles.

Como principales ventajas del proceso de selección propuesto y analizado se han de señalar las siguientes:

1. Los individuos pueden graduar cómo valoran la adecuación de los miembros del grupo respecto del atributo considerado.
2. La valoración colectiva de los individuos puede contemplar diversos grados de liberalismo, concediendo mayor o menor importancia a la autoevaluación de los individuos, según el valor que se asigne al parámetro correspondiente.
3. El uso de medias cuasiaritméticas para la obtención de las valoraciones colectivas permite transformar las valoraciones iniciales de acuerdo a diferentes patrones de normalización.

4. La utilización de umbrales de cualificación para la selección final da cabida a diferentes grados de compromiso respecto del objetivo a lograr.

En definitiva, la flexibilidad del modelo planteado permite abordar problemas de muy diversa naturaleza. Con objeto de mostrar este aspecto se ha considerado un ejemplo en el que a partir de un mismo perfil de valoraciones individuales se consiguen resultados distintos según se fijen los elementos variables del modelo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Junta de Castilla y León (Consejería de Educación y Cultura, Proyecto VA057/02), el Ministerio de Ciencia y Tecnología, Plan Nacional de Investigación Científica, Desarrollo e Innovación Tecnológica (I+D+I) (Proyecto BEC2001-2253) y FEDER. Los autores agradecen a Dinko Dimitrov por haberles introducido en la literatura sobre el problema "Who is a J?", así como a Miguel Ángel Ballester por sus comentarios y sugerencias.

BIBLIOGRAFÍA

1. Aczél, J. (1966): *A Short Course on Functional Equations and their Applications.* Academic Press, New York.

2. Aczél, J. (1987): *A Short Course on Functional Equations.* D. Reidel Piblishing Company, Dordrecht.

3. Aczél, J. – Alsina, C. (1987): "Synthesizing judgments: a functional equations approach". *Mathematical Modelling*, 9/3-5, pp. 311-320.

4. Billot, A. (2003): "How the liberalism kills democracy or Sen´s theorem revisited". *Public Choice*, 116, pp. 247-270.

5. Bullen, P.S. – Mitrinovic, D.S. – Vasic, P.M. (1988): *Means and Their Inequalities*. Reidel, Dordrecht.

6. Calvo, T. – Kolesárova, A. – Komorníková, M. – Mesiar, R. (2002): "Aggregation operators: Properties, classes and constructions models". In Calvo, T. – Mayor, G. – Mesiar, R. (eds.) *Aggregation Operators: New Trends and Applications*. Physica-Verlag, Heidelberg, pp. 3-104.

7. Dimitrov, D. – Sung, S.C. – Xu, Y. (2003): "Procedural group identification". Tilburg University, CentER Discussion Paper 2003-10.

8. Fodor, J. – Roubens, M. (1994): *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

9. García Lapresta, J.L. – Llamazares, B. (2000): "Aggregation of fuzzy preferences: Some rules of the mean". *Social Choice and Welfare*, 17, pp. 673-690.

10. García Lapresta, J.L. – Llamazares, B. (2001): "Majority decisions based on difference of votes". *Journal of Mathematical Economics*, 45, pp. 463-481.

11. Kasher, A. (1993): "Jewish collective identity". In D.T. Goldberg – M. Krausz (eds.) *Jewish Identity*. Temple University Press, Philadelphia, pp. 56-78.

12. Kasher, A. – Rubinstein, A. (1997): "On the question 'Who is a J?' A social choice approach". *Logique & Analyse*, 160, pp. 385-395.

13. Ovchinnikov, S.V. (1990): "Means and social welfare functions in fuzzy binary relation spaces". In Kacprzyk, J. – Fedrizzi, M. (eds.) *Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 143-154.

14. Samet, D. – Schmeidler, D. (2003): "Between liberalism and democracy". *Journal of Economic Theory*, 110, pp. 213-233.

15. Sung, S.C – Dimitrov, D. (2003): "On the axiomatic characterization of 'Who is a J?'". Tilburg University, CentER Discussion Paper 2003-89.