CARACTERIZACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LOS MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA LA DISTRIBUCIÓN PERSONAL DE LA RENTA. UNA APLICACIÓN A LOS MODELOS DE DAGUM EN EL CASO ESPAÑOL

GARCÍA PÉREZ, Carmelo
Departamento de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.
Universidad de Alcalá
correo-e: carmelo.garcia@uah.es

CALLEALTA BARROSO, Fco. Javier
Departamento de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.
Universidad de Alcalá
correo-e: franciscoj.callealta@uah.es

NÚÑEZ VELÁZQUEZ, José Javier
Departamento de Estadística, Estructura Económica y O.E.I.
Universidad de Alcalá
correo-e: josej.nunez@uah.es

RESUMEN

Con el objetivo de dotar de una interpretación económica a los parámetros de las distribuciones probabilísticas más utilizadas en el campo de la modelización de la distribución personal de la renta, se presenta una propuesta de caracterización de los mismos que se aplica para deducir el significado económico de los parámetros de los modelos propuestos por Dagum. Dicha interpretación se completa con la obtención de las estimaciones paramétricas, en el caso español, y el análisis de su evolución durante período 1973-1991.

Palabras clave: Distribución Personal de la Renta, Modelos probabilísticos continuos, indicadores económicos.

1. Introducción

El estudio cuantitativo de la distribución personal de la renta se ha centrado en diferentes áreas de interés. El mayor número de aportaciones se ha referido a temas tales como la medición del nivel de desigualdad[1], la medición del nivel de pobreza (Sen, 1976), la introducción de aspectos distributivos en las funciones e indicadores de bienestar (Atkinson, 1970) o el análisis de la repercusión de determinadas políticas del Estado sobre la redistribución (Kakwani, 1977). Paralelamente a estos temas, se ha desarrollado una fructífera línea de investigación consistente en la propuesta de modelos probabilísticos destinados a resumir con un pequeño conjunto de parámetros la compleja realidad de la distribución global.

La teoría de la modelización probabilística de la distribución personal de la renta, desarrollada sobre la base de los trabajos de Pareto, utiliza la formalización de una serie de conceptos tales como la consideración de la renta personal como una variable aleatoria X, siendo x_i la renta personal que percibe un individuo genérico i. La distribución personal de la renta en una población de tamaño N puede representarse entonces por el vector de dimensión finita $(x_1, x_2, ..., x_N)$. Al tratarse de poblaciones grandes, aunque finitas, en las que la variable renta toma numerosos valores, modelizaremos, por aproximación, X como una variable aleatoria continua. En este contexto, la modelización paramétrica[2] tiene como objetivo la propuesta a priori y posterior estimación de un modelo probabilístico para la distribución personal de la renta definido por una familia de funciones de distribución, $\{F(x;\theta);\theta \in \Theta\}$, o de densidad, $\{f(x;\theta);\theta \in \Theta\}$, perfectamente especificadas salvo un vector θ de parámetros desconocidos pertenecientes al espacio paramétrico Θ.

Entre los autores continuadores de esta línea de investigación iniciada por Pareto, a finales del siglo XIX, se encuentra Gibrat (1931), que utilizó la distribución lognormal; Amoroso (1925), que especificó y estimó los parámetros de la distribución gamma generalizada; Salem y Mount (1974), que emplearon una gamma biparamétrica (tipo III del sistema de Pearson, que es un caso particular del modelo de Amoroso); Bartels y Van

[1] Entre otros muchos trabajos pueden destacarse los de Atkinson (1970), Sen (1973), Cowell (1980) y Shorrocks (1980, 1983).

[2] Se ha desarrollado también un enfoque no paramétrico para la modelización de la distribución personal de la renta que no asume ninguna forma funcional especificada previamente como modelo. Una panorámica de este enfoque y de los problemas estadísticos que afrontan los diferentes autores del mismo se presenta, en un nivel general, en Silverman (1986), y con aplicaciones al estudio de las distribuciones de renta en Cowell (1995) y Pudney (1993).

Metelen (1975), que aplicaron los modelos gamma, lognormal y la distribución de Weibull; Thurow (1970) y Kakwani y Podder (1976) que utilizaron la distribución beta; y Singh y Maddala (1976) y Dagum (1977) que proponen sus propios modelos. Más recientemente destacan los trabajos de McDonald (1984), Majunder y Chakravarty (1990), McDonald y Xu (1995) y Bordley *et al.* (1996), los tres primeros sobre la distribución beta generalizada y el último sobre la distribución de elasticidad cuadrática.

La utilización de las estimaciones de los parámetros de estas distribuciones teóricas presenta, entre otras, las siguientes ventajas señaladas por Prieto Alaiz (1998):

(i) simplifica cualquier estudio sobre el análisis de la distribución

(ii) permite comparar entre distribuciones, a través del tiempo y el espacio, analizando la evolución de los parámetros estimados

(iii) permite expresar los índices de desigualdad y pobreza a partir de los parámetros de la función de densidad, simplificando la estimación y el análisis de sus propiedades estadísticas

(iv) las estimaciones paramétricas son instrumentos de análisis del impacto que tienen ciertas acciones de política económica sobre la distribución personal de la renta, a través del estudio de la variación de las estimaciones de los parámetros.

Sin embargo, los numerosos trabajos de esta línea se centran, básicamente, en la especificación de nuevas formas funcionales y en la mejora de los métodos de estimación de sus parámetros, prescindiendo, en ocasiones, de fundamentos de tipo económico, que son sustituidos por la superación de exigencias de bondad de ajuste, para elegir entre modelos alternativos. Por otra parte las ventajas señaladas de la utilización de la modelización paramétrica se quedan, habitualmente, sin explotar y los trabajos no llegan más allá de la propuesta y estimación de distribuciones probabilísticas, a falta de que las estimaciones de parámetros obtenidas puedan ser utilizadas en el análisis económico de los mecanismos causales de la distribución personal de la renta[3]. Esta patente falta de complementariedad entre la modelización probabilística y su fundamentación

[3] Este hecho es especialmente patente en el caso español donde existen excelentes y completos estudios sobre modelización paramétrica (Callealta et al., 1996, Prieto Alaiz, 1998).

económica es un peligro constante en el desarrollo de los estudios sobre la distribución personal de la renta. En este sentido, Creedy (1996, p. 5) destaca la importancia de establecer vínculos entre modelos económicos y estadísticos para evitar "los usos y comparaciones arbitrarias entre formas funcionales alternativas de la distribución de la renta".

Con este objetivo de vincular las técnicas estadísticas y su finalidad en el análisis económico para el que fueron introducidas, en el presente trabajo, se profundiza en el significado económico de los diferentes parámetros de las distribuciones probabilísticas propuestas para la distribución personal de la renta. En este sentido, se formula una propuesta de clasificación con el fin de facilitar el posterior análisis de la formación de la distribución personal de la renta a través de los parámetros, constituidos en indicadores de diferentes características y efectos de políticas distributivas. Dicha clasificación se aplica para caracterizar e interpretar el significado de los parámetros de las distribuciones propuestas por Dagum. La interpretación teórica de los parámetros se completa y contrasta con una aplicación a las distribuciones de la renta de España y en sus provincias, en el período 1973-1991. A partir del análisis de los parámetros estimados, en su función de indicadores económicos, se obtienen los rasgos de la evolución de las distribuciones de la renta (global y provinciales) en el período de estudio. Finalmente, se presentan las principales conclusiones obtenidas en el trabajo.

2. Caracterización de los parámetros de los modelos probabilísticos de la distribución personal de la renta

Uno de los exponentes de la débil conexión de la modelización probabilística de la distribución personal de la renta con el estudio de sus factores determinantes es la inexistencia de una caracterización profunda de los parámetros que intervienen en este tipo de modelos de acuerdo con su significado económico y su repercusión sobre determinados aspectos de interés de la distribución: renta media, nivel de desigualdad, renta mínima, orden de los percentiles donde se centra su actuación, etc. En el presente epígrafe, se propone una caracterización de los parámetros tomando como punto de partida las categorías de escala y desigualdad, propuestas por Dagum, y las clasificaciones existentes en el análisis general de las distribuciones probabilísticas.

Dagum (1977, p.417) distingue dos categorías de parámetros, los parámetros de escala y los parámetros de desigualdad, clasificación que delimita de la siguiente forma: “Los dos tipos de parámetros más habituales encontrados son el parámetro de escala y el de desigualdad. El primero está relacionado con la unidad de medida de la renta y el segundo es de dimensión cero y está relacionado con la desigualdad de la distribución de la renta”. Esta doble clasificación, que en líneas generales se ha mantenido en el tiempo, resulta insuficiente y poco detallada si tenemos en cuenta el interesante desarrollo de la modelización probabilística de la distribución de la renta personal en los últimos treinta años. Así, con el aumento en el número de modelos continuos utilizados para describir la distribución de la renta, se ha generado una amplia variedad de parámetros con numerosos matices que caracterizan su actuación concreta sobre la distribución.

Considerando esta variedad, se propone una caracterización más completa de los parámetros frecuentes en las funciones probabilísticas que modelizan la distribución personal de la renta, con la pretensión de ampliar las categorías señaladas por Dagum, sin abandonar las coordenadas económicas en que este autor desarrolla su estudio y que sirven para interpretar, en cada caso, el contenido económico de cada parámetro. La relación que se presenta no será, por tanto, una enumeración exhaustiva de los parámetros del análisis de funciones de distribución o densidad de una variable aleatoria, sino que se ceñirá al campo de los modelos utilizados en el estudio de la distribución personal de la renta y atenderá básicamente a los efectos que la variación del parámetro puede ocasionar sobre la unidad de medida de la renta o sobre medidas de interés económico tales como la renta media, percentiles o la desigualdad presente en la distribución. Esta caracterización permite determinar qué parámetros deberán ser el objetivo de políticas económicas, al constituirse como indicadores de determinadas características de la distribución.

Para realizar nuestra propuesta, adoptaremos la siguiente notación.

Sea θ el vector paramétrico de orden (s x 1), perteneciente al espacio paramétrico Θ, que define una familia de funciones de distribución $\{F(x;\theta);\theta\in\Theta\}$ o de densidad $\{f(x;\theta);\theta\in\Theta\}$. Definimos una partición del vector paramétrico $\theta=[\theta_1,\theta_2]$, donde θ_1 es un escalar y θ_2 el vector de los restantes s – 1 parámetros. Por tanto, podrá expresarse: $X \sim F(x;\theta_1,\theta_2)$

De acuerdo con las ideas básicas establecidas hasta aquí, los parámetros habituales de las funciones probabilísticas propuestas para modelizar la distribución de la renta pueden pertenecer a las siguientes categorías:

(i) Posición

Un parámetro θ_1 será de posición si informa de la situación, sobre la escala de rentas, de los valores relevantes de la distribución (promedios, valores extremos, etc.). Ejemplos de este tipo de parámetro son la mediana en la distribución log-Student, la renta mínima en la distribución de Pareto, Benini o gamma generalizada; la renta media en numerosas distribuciones, etc.

(ii) Traslación

El parámetro θ_1 será un parámetro de traslación si, definida la nueva variable $Z = X - c$, ésta presenta una función de distribución $G(z)$ tal que, evaluada en $z = x - c$, se tiene que:

$$G(z) = F(x;\theta_1,\theta_2) = F(z;\theta_1 - k\,c,\theta_2) \quad , \qquad k > 0$$

Habitualmente, estos parámetros de traslación pueden ser a su vez parámetros de posición, tal como se definieron anteriormente. Así, el parámetro que más frecuentemente desempeña esta función de traslación en los modelos de distribuciones de ingresos es la renta mínima.

(iii) Escala[4]

El parámetro θ_1 será un parámetro de escala, si al definir el cambio de escala $Z = \frac{X}{c}$ sobre la variable *X*, donde *c* > *0*, la variable *Z* presenta una función de distribución *G(z)* , tal que, evaluada en $z = \frac{x}{c}$, es:

$$G(z) = F(x;\theta_1,\theta_2) = F\left(z;\frac{\theta_1}{c^k},\theta_2\right) \quad , \qquad k > 0$$

De la definición se deduce que los parámetros de escala acusan los cambios de las unidades de medida de la variable renta, a diferencia de otros parámetros que se mantienen inalterados en la nueva expresión de la función de densidad o de distribución tras la transformación de la variable renta.

(iv) Igualdad (desigualdad)

Sea *I* un indicador adimensional de desigualdad[5], el parámetro θ_1 será un parámetro de igualdad, para *I*, si se cumple que $\frac{\partial I}{\partial \theta_1} < 0$, donde *I* es un indicador adimensional de.

La definición de parámetro de desigualdad para *I* será idéntica aunque el signo de la derivada parcial $\frac{\partial I}{\partial \theta_1}$ deberá ser positivo.

La gran variedad de parámetros que entran a formar parte de esta categoría nos lleva a proponer clasificaciones según las peculiaridades más importantes de cada uno de ellos. Un primer criterio de clasificación que se propone dentro de la categoría de los parámetros de igualdad (desigualdad) sería el de su influencia sobre la renta media como consecuencia de su actuación sobre la desigualdad de la distribución. En este sentido, encontramos los siguientes tipos de parámetros, que se ilustran en el gráfico 1:

[4] Para ser más rigurosos, el tipo de parámetro se refiere a cambios lineales de escala u homotecias. Sin embargo, se mantiene esta denominación por resultar más intuitiva, teniendo en cuenta el tipo de distribuciones económicas a las que nos referimos.
[5] Se suponen las restricciones necesarias para que las derivadas parciales existan y tengan pleno sentido.

1. Parámetros cuyos aumentos producen mayor igualdad y disminución de la renta media de la distribución (Cuadrante A del gráfico 1.1), si:

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_1} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \theta_1} < 0$$

   siendo I un indicador adimensional de desigualdad y μ la renta media.

2. Parámetros cuyos aumentos producen mayor igualdad y aumento de la renta media de la distribución (Cuadrante B del gráfico 1), si:

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_1} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \theta_1} > 0$$

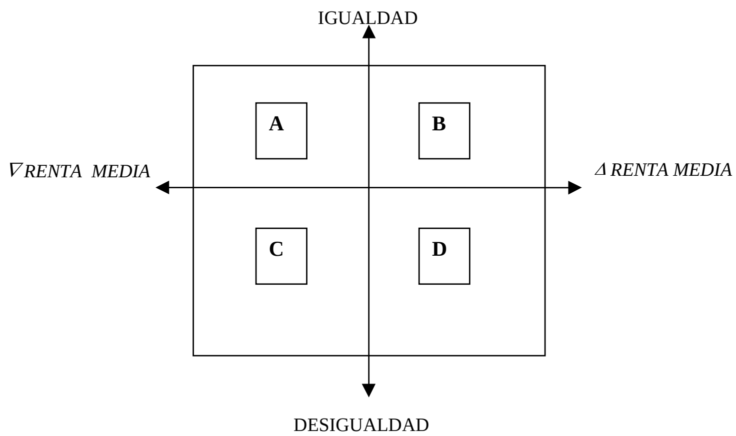
3. Parámetros cuyos aumentos producen mayor desigualdad y disminución de la renta media (Cuadrante C del gráfico 1), si:

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_1} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \theta_1} < 0$$

4. Parámetros cuyos aumentos producen mayor desigualdad y aumento de la renta media (Cuadrante D del gráfico 1), si:

$$\frac{\partial I}{\partial \theta_1} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \theta_1} > 0$$

Gráfico 1
Clasificación de los parámetros de igualdad (desigualdad) según su influencia sobre la renta media



Dentro de la categoría de parámetros de igualdad podrían también realizarse dos nuevas clasificaciones según la incidencia de las variaciones del parámetro sobre los distintos órdenes de los percentiles de la distribución:

1. Parámetros redistribuidores puros, cuyos aumentos provocan reducción de las rentas correspondientes a los percentiles superiores y aumento de las rentas correspondientes a los percentiles inferiores. Es decir, θ_1 será un parámetro redistribuidor puro si es un parámetro de igualdad y además:

$$\exists\ p_0, p_1 \in (0,1) \quad : \quad p_0 \leq p_1 \quad \text{y :}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \theta_1} > 0 \quad , \qquad x_p < x_{p_0}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \theta_1} < 0 \quad , \qquad x_p > x_{p_1}$$

siendo x_p el percentil de orden *p* de la distribución de rentas.

2. Parámetros redistribuidores moderados, que repercuten sobre la distribución aumentando o disminuyendo todos los percentiles, siendo la mayor o menor incidencia sobre determinados tramos de la distribución lo que provoca una reducción o aumento de la desigualdad.

   θ_1 será un parámetro redistribuidor moderado si es un parámetro de igualdad y:

$$\frac{\partial x_p}{\partial \theta_1} > 0\,,\ \forall\, x_p, \quad 0 < p < 1, \quad \text{ó} \quad \frac{\partial x_p}{\partial \theta_1} < 0\,,\ \forall\, x_p, \quad 0 < p < 1$$

La misma clasificación podría realizarse considerando los parámetros de desigualdad que actuarían en sentido contrario a la redistribución.

(v) Mixtura

Son aquellos parámetros que se utilizan como indicadores de la magnitud de rentas nulas o negativas relacionadas con bolsas de desempleo o marginalidad. Como ejemplo de esta situación, podemos señalar el parámetro α de la distribución de Dagum de tipo II, en la que se realiza la mixtura de dos distribuciones diferentes: una distribución de Dagum de tipo I con peso $(1-\alpha)$ y una distribución degenerada en el cero con peso α.

La propuesta de clasificación presentada establece diferenciaciones sobre la naturaleza principal de cada parámetro, aunque hay que señalar que, en algunos casos, pueden derivarse ciertas influencias sobre otros aspectos de la distribución que tendrán que ser matizados en cada caso.

3. Caracterización de los parámetros de los modelos de Dagum

El modelo de Dagum es uno de los más utilizados recientemente para modelizar la distribución de la renta, tanto en estudios internacionales como para el caso español, (Callealta *et all.*, 1996, Prieto Alaiz, 1998).

Las funciones de densidad y distribución de este modelo son[6]:

Modelo de tipo I:

$$f(x) = \lambda\beta\delta x^{-\delta-1}(1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta-1}; \quad 0 < x < \infty; \quad \lambda > 0, \delta > 0, \beta > 0$$

$$F(x) = (1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta}; \quad 0 < x < \infty; \quad \lambda > 0, \delta > 0, \beta > 0$$

Modelo de tipo II:

$$\begin{cases} P[X = 0] = \alpha \\ f(x) = (1-\alpha)\lambda\beta\delta x^{-\delta-1}(1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta-1}; \quad 0 < x < \infty; \; 0 \le \alpha < 1, \lambda > 0, \delta > 0, \beta > 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \alpha + (1-\alpha)(1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta}; \quad 0 \le x < \infty; \; 0 \le \alpha < 1, \lambda > 0, \delta > 0, \beta > 0$$

Modelo de tipo III:

$$f(x) = (1-\alpha)\lambda\beta\delta x^{-\delta-1}(1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta-1}; \quad 0 < x_0 \le x < \infty; \quad \alpha < 0, \lambda > 0, \delta > 0, \beta > 0$$

$$F(x) = \alpha + (1-\alpha)(1+\lambda x^{-\delta})^{-\beta}; \quad 0 < x_0 \le x < \infty; \quad \alpha < 0, \lambda > 0, \delta > 0, \beta > 0$$

[6] Véase Dagum (1977).

La renta media de las distintas distribuciones responde a la siguiente expresión (Dagum, 1977):

$$\mu = E(X) = \begin{cases} (1-\alpha)\beta\lambda^{\frac{1}{\delta}} \cdot \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right) & 0 \le \alpha < 1, \qquad \delta > 1 \\ (1-\alpha)\beta\lambda^{\frac{1}{\delta}} \cdot \mathrm{B}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x_0}; 1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right) & \alpha < 0, \qquad \delta > 1 \end{cases}$$

donde:

$$\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{\delta}}(1-x)^{\beta+\frac{1}{\delta}-1}dx \qquad 0 \le x < 1$$

$$\mathrm{B}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x_0^{\delta}}; 1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right) = \int_0^{\frac{\lambda}{\lambda+x_0^{\delta}}} x^{-\frac{1}{\delta}}(1-x)^{\beta+\frac{1}{\delta}-1}dx \qquad 0 \le x < 1$$

Y el percentil de orden p puede obtenerse como:

$$x_p = \lambda^{\frac{1}{\delta}}\left[\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1\right]^{-\frac{1}{\delta}} \qquad p > \alpha$$

Por tanto, son cuatro los parámetros que intervienen en la especificación de los distintos modelos propuestos por Dagum. En una primera aproximación, se comprueba que tres de ellos no están relacionados con la unidad de medida de la variable: el parámetro α, cuyo valor determina el tipo de modelo, y los parámetros β y δ, que Dagum (1977) califica, simplemente, como parámetros de igualdad. El parámetro λ es por el contrario un parámetro de escala como se demuestra a continuación.

Sea la variable renta X que se distribuye de acuerdo a una distribución de Dagum de parámetros α, β, δ, y λ, que notamos de forma abreviada como $X \sim D(\alpha,\beta,\delta,\lambda)$, y sea la variable $Z = \frac{X}{c}, \quad c > 0$, procedente de aplicar un cambio de escala sobre la variable renta, entonces:

$$F_Z(z) = P[Z \le z] = P\left[\frac{X}{c} \le z\right] = P[X \le zc] = F_X(zc) =$$
$$= \alpha + (1-\alpha)\left(1 + \lambda(zc)^{-\delta}\right)^{\beta} = \alpha + (1-\alpha)\left(1 + (\lambda c^{-\delta})z^{-\delta}\right)^{\beta} \sim D(\alpha, \beta, \delta, \lambda c^{-\delta})$$

Por tanto, un cambio en la unidad de medida de la renta producirá la modificación del parámetro de escala λ, manteniendo inalterados el resto de parámetros. La neutralidad de los efectos del parámetro sobre la desigualdad resulta evidente cuando se obtiene la elasticidad de los percentiles, $\varepsilon_{\lambda}(x_p)$, y de la renta media, $\varepsilon_{\lambda}(\mu)$, con respecto a λ. Ambas expresiones, que se obtienen a continuación, resultan positivas, constantes para cada orden del percentil e iguales a δ^{-1}. Así pues, un incremento unitario del parámetro de escala produce un incremento una misma cantidad δ^{-1} en la renta media y en todos los percentiles, independientemente de su orden; de esta forma, se mantienen inalteradas las medidas adimensionales de desigualdad.

$$\varepsilon_{\lambda}(x_p) = \frac{\partial x_p}{\partial \lambda}\frac{\lambda}{x_p} = \frac{\lambda^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}-1\right)^{-\frac{1}{\delta}}}{\lambda\delta}\frac{\lambda}{\lambda^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}-1\right)^{-\frac{1}{\delta}}} = \frac{1}{\delta} > 0$$

$$\varepsilon_{\lambda}(\mu) = \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}\frac{\lambda}{\mu} = \frac{(1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{\delta}}\beta\,\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right)}{\lambda\delta}\frac{\lambda}{(1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{\delta}}\beta\,\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right)} = \frac{1}{\delta} > 0$$

El tipo de modelo de Dagum está determinado por el rango de valores que toma el parámetro α. Así, si α toma el valor cero estaremos en el modelo de Dagum de tipo I, caracterizado por la exclusión de rentas negativas, nulas o rentas mínimas a partir de las cuales comienza el dominio de la función de distribución de la variable renta.

El parámetro α aparece en el modelo de tipo II como un porcentaje finito de rentas nulas. En la práctica, Dagum se refiere a un porcentaje de individuos sin fuentes de ingresos o con pérdidas netas (deudas) en su patrimonio. Dagum (1977) considera que "α puede recibir la interpretación de una cuota pura de desempleo para las unidades económicas consideradas en el sentido que su parte dominante es constituida por aquellas unidades económicas desempleadas sin seguridad social, pues $x_o = 0$".

Cuando α toma valores negativos (Modelo de Dagum de tipo III), se tendrá el caso de distribuciones de renta que tienen una renta mínima x_0, que puede considerarse como una renta de subsistencia o la mínima resultante de eliminar las unidades con renta cero o negativa.

La expresión de la derivada del percentil de orden p con respecto al parámetro α resulta ser, en el caso de la Dagum de tipo II y III:

$$\frac{\partial x_p}{\partial \alpha} = -\frac{\lambda^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}-1\right)^{-\left(1+\frac{1}{\delta}\right)}(1-p)}{\delta\beta(p-\alpha)(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\beta}}} < 0$$

Expresión que, para los valores establecidos inicialmente por Dagum para los restantes parámetros, resulta ser negativa, creciente y cóncava respecto de p, lo que implica que el parámetro reduce todos los percentiles de la distribución pero con especial incidencia sobre los inferiores, aumentando así la desigualdad de la distribución.

Para el caso de la distribución de Dagum de tipo II, obviamente, dicha expresión presenta una asíntota vertical en $p = \alpha$, manteniéndose inalterado el comportamiento comentado del parámetro para los percentiles de orden superior a α.

Por otra parte, esta actuación del parámetro sobre los percentiles provoca un efecto reductor de la renta media, tal como indican las siguientes expresiones:

Si $0<\alpha<1$,

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = -\lambda^{\frac{1}{\delta}}\beta\,\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right) < 0, \qquad \delta > 1$$

Si $\alpha < 0$,

$$\frac{\partial \mu}{\partial \alpha} = -\lambda^{\frac{1}{\delta}}\beta\,\mathrm{B}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x_0^r}; 1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right) < 0, \qquad \delta > 1$$

Así pues, el parámetro α será un parámetro de desigualdad reductor de la renta la renta media. En el caso del modelo de tipo II, dicho parámetro será además considerado de mixtura.

Respecto al parámetro δ , Dagum (1977) obtenía una primera interpretación como parámetro de igualdad tras comprobar que el signo de la derivada parcial del índice de Gini con respecto al parámetro era negativo.

Para profundizar en este significado se ha obtenido la expresión de la derivada parcial del percentil de orden *p* con respecto al parámetro δ, obteniéndose que:

$$\frac{\partial x_p}{\partial \delta} = \left(\frac{1}{\delta^2}\right) \ln\left(\frac{\lambda}{\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1}\right)\left(\frac{\lambda}{\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1}\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

Esta expresión se hace cero para $p_0 = \alpha + \frac{1-\alpha}{(\lambda+1)^{\beta}}, \quad \forall \delta > 0$, probabilidad que se corresponde siempre con el valor de la función de distribución que se obtiene para una renta igual a 1; es decir, $x_{p_0} = 1$, siendo, por tanto, crucial la escala de medida de la variable renta. Por otra parte, si evaluamos la expresión de la derivada parcial en los dos intervalos que delimita p_0 , se cumple que:

$$\frac{\partial x_p}{\partial \delta} > 0 \quad \text{si} \quad p < \alpha + \frac{1-\alpha}{(\lambda+1)^{\beta}}$$

$$\frac{\partial x_p}{\partial \delta} < 0 \quad \text{si} \quad p > \alpha + \frac{1-\alpha}{(\lambda+1)^{\beta}}$$

El punto p_0 donde se produce esta diferenciación entre percentiles que aumentan y percentiles que disminuyen no depende pues del parámetro δ. Aunque las variaciones de este parámetro son las que provocan la redistribución, ésta se realiza pivotando sobre un punto p_0 que se determina en función de los demás parámetros de la siguiente forma:

$$\frac{\partial p_0}{\partial \beta} = -\frac{(1-\alpha)\,ln(1+\lambda)}{(1+\lambda)^{\beta}} < 0$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial \alpha} = 1 - \frac{1}{(1+\lambda)^{\beta}} > 0$$

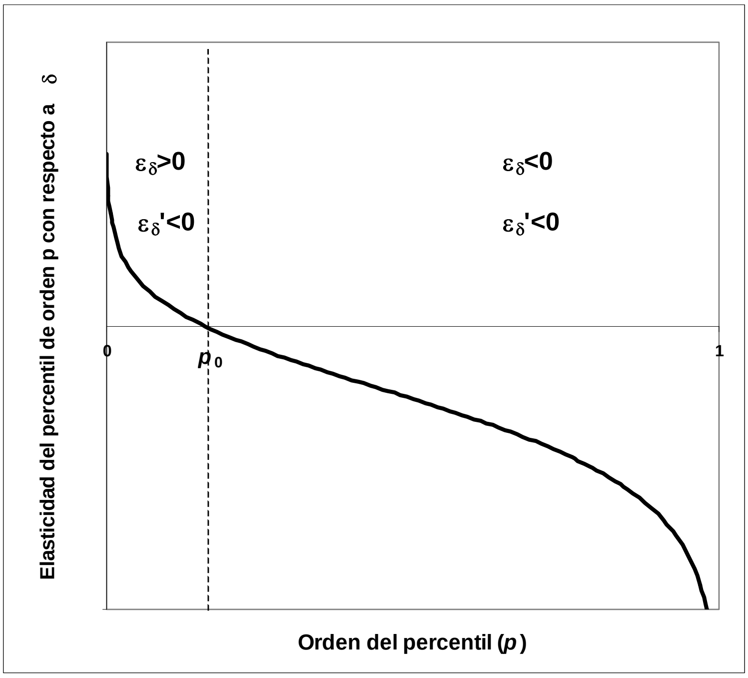
$$\frac{\partial p_0}{\partial \lambda} = -\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+\lambda)^{\beta+1}} < 0$$

Por tanto, aumentos en el parámetro de escala λ y en β desplazan el punto de redistribución a la izquierda, mientras que incrementos de α lo desplazan a la derecha.

Se comprueba también que la elasticidad de los percentiles con respecto a este parámetro es decreciente por lo que las reducciones de los percentiles superiores serán mayores según aumente su orden. En el otro extremo de la distribución, los aumentos de los percentiles inferiores serán mayores a medida que su orden sea menor.

$$\varepsilon_{\delta}(x_p) = \frac{\partial x_p}{\partial \delta}\frac{\delta}{x_p} = \frac{\ln\left(\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1\right) - \ln\lambda}{\delta} \qquad ; \; \frac{\partial \varepsilon_{\delta}(x_p)}{\partial \delta} < 0$$

Gráfico 2
Función de elasticidad del percentil de orden *p* con respecto al parámetro δ



Con respecto a su efecto sobre la renta media, aumentos del parámetro provocan una reducción de la misma, consecuencia de una redistribución que penaliza excesivamente a los percentiles superiores, no lográndose compensar dicha penalización con el aumento de los percentiles inferiores. Así, para la distribución de tipo II se obtiene:

$$\frac{\partial \mu}{\partial \delta} = \frac{(1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{\delta}} \beta \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right)}{\delta^2}\left(\Psi\left(1-\frac{1}{\delta}\right)-\Psi\left(\beta+\frac{1}{\delta}\right)-1\right)<0$$

donde $\Psi(x)$ es la función digamma, definida para un número real positivo x como:

$$\Psi(x)=\frac{d \log \Gamma(x)}{dx}=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

Aplicando las propiedades de la función digamma, respecto al crecimiento y acotación, y teniendo en cuenta las restricciones habituales sobre los parámetros ($\delta > 1, \beta > 0, \beta\delta > 1, \alpha < 1$), se deduce que:

$$\left(\Psi\left(1-\frac{1}{\delta}\right)-\Psi\left(\beta+\frac{1}{\delta}\right)-1\right)<0$$

y como:

$$\frac{(1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{\delta}} \beta \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta}, \beta+\frac{1}{\delta}\right)}{\delta^2}>0$$

se tiene que la derivada de la renta media con respecto al parámetro δ será negativa.

La demostración es similar para las distribuciones de Dagum de tipo I y III.

Concluimos pues que el parámetro delta es un instrumento a través del cual puede aumentarse la igualdad de la distribución, como ya era conocido de acuerdo al signo de la derivada del índice de Gini obtenida por Dagum (1977); sin embargo, el análisis aquí realizado permite conocer los procesos que producen este aumento igualdad: una progresiva y creciente penalización de los percentiles, según aumenta su orden, y un aumento de los percentiles inferiores creciente, según disminuye su orden. La excesiva penalización de las rentas más altas provoca, a la vez, una disminución de la renta media, similar a las medidas redistribuidoras que, al castigar excesivamente las rentas altas, pueden provocar una disminución de la renta media por el desestímulo en actitudes de inversión o ahorro.

Finalmente, el parámetro δ quedará pues caracterizado como perteneciente a la categoría de igualdad, reductor de las renta media y redistribuidor puro.

En el caso del parámetro β, éste resulta ser también un parámetro de igualdad de acuerdo con el signo de la derivada parcial del índice de Gini (Dagum, 1977), pero, sin embargo, su actuación es bien distinta a la del parámetro δ. Así, la elasticidad de los percentiles es siempre positiva para todos los órdenes, por lo que un aumento del parámetro produce aumentos generalizados de todas las rentas de la distribución. Así:

$$\varepsilon_\beta(x_p)=\frac{\partial x_p}{\partial\beta}\frac{\beta}{x_p}=\frac{\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}\ln\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)}{\delta\beta\left(\left(\frac{1-\alpha}{p-\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}}-1\right)}>0\,; \qquad \frac{\partial\varepsilon_\beta(x_p)}{\partial\beta}<0$$

Además, la función de elasticidad es decreciente, indicando que los aumentos serán cada vez menores según aumenta el orden del percentil. Con este aumento de rentas, más fuerte en los percentiles inferiores que en los superiores, se consigue una mayor igualdad en la distribución a la vez que se produce una aumento de la renta media ya que, para la distribución de tipo II, se obtiene que:

$$\frac{\partial\mu}{\partial\beta}=(1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{\delta}}\beta\mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta},\beta+\frac{1}{\delta}\right)\left(1-\Psi(1+\beta)+\Psi\left(\beta+\frac{1}{\delta}\right)\right)>0$$

De acuerdo a las propiedades de crecimiento y acotación de la función digamma y dadas las restricciones habituales sobre los valores de los parámetros ($\delta>1,\beta>0,\beta\delta>1,\alpha<1$), se tiene que:

$$1+\Psi\left(\beta+\frac{1}{\delta}\right)>\Psi(1+\beta)$$

y como,

$$(1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{\delta}}\beta \mathrm{B}\left(1-\frac{1}{\delta},\beta+\frac{1}{\delta}\right)>0$$

entonces:

$$\frac{\partial\mu}{\partial\beta}>0$$

La demostración es similar para las distribuciones de tipo I y III.

Como conclusión del análisis realizado sobre la sensibilidad de los distintos parámetros de los modelos de Dagum, podría decirse que las políticas que pretendan un manejo adecuado de la distribución deberán perseguir:

(i) un aumento del parámetro de escala, como indicativo del nivel de renta que se distribuye, mediante medidas de mejora de eficiencia

(ii) un aumento del parámetro β para provocar una mayor igualdad a través de la mejora de los tramos bajos y medios de la distribución

(iii) fijar un determinado nivel para δ, de forma que se produzca la necesaria redistribución sin que se penalice en exceso la renta media, dificultad que puede solventarse con un simultáneo aumento del parámetro de escala.

(iv) reducir α, para que la renta mínima y las más bajas crezcan y el efecto de esta mejora repercuta de forma positiva sobre la igualdad. En ocasiones[7], reducir el parámetro α supone actuar directamente en la reducción de bolsas de pobreza, marginación o grupos de endeudados.

[7] Distribución de Dagum de tipo II.

3. Evolución de las estimaciones de los parámetros de las distribuciones de Dagum para el caso español (1973-1991)

La adecuación de las distribuciones de Dagum como modelos de la distribución personal de la renta en el caso español ha sido contrastada en numerosos trabajos (Pena et al., 1997; Prieto Alaiz, 2001; García, 2003) tanto por sus propiedades teóricas, algunas de las cuales ya se han señalado, como por el aceptable ajuste a las distribuciones empíricas tanto del agregado nacional como de distintas desagregaciones (regionales, tipos de hábitat, categorías socio-profesionales, etc.). En el presente epígrafe, como aplicación y contrastación de la interpretación teórica presentada en el apartado anterior, se analizan los resultados obtenidos al estimar los parámetros de las distribuciones de Dagum del total nacional y de las distintas provincias españolas en los cortes temporales correspondientes a las Encuestas Básicas de Presupuestos Familiares. A través de las estimaciones de los parámetros, pueden deducirse los rasgos básicos del proceso de cambio experimentado en la distribución personal de la renta en España en el período 1973-1991.

El método de obtención de estimadores que se ha utilizado ha sido el de máxima verosimilitud. Las razones que han llevado a la utilización de este método recaen en las buenas propiedades de los estimadores que proporciona: consistencia, eficiencia y normalidad asintótica además de que, si existe un estimador eficiente, es el de máxima verosimilitud.

Para llevar a la práctica la estimación, se han utilizado los programas diseñados en el trabajo de Pena *et all.* (1996), para obtener las estimaciones paramétricas usando el método de mínimos cuadrados en modelos no lineales, con restricciones de acotación sobre los parámetros, mediante el procedimiento “NLIN” del paquete informático estadístico SAS. En el estudio citado, se desarrolla una reformulación de los distintos métodos de estimación para su resolución mediante los programas diseñados para tal fin. En todos los casos, la estimación se realizó considerando una división del recorrido de la variable renta en los 100 intervalos interpercentílicos, tomando como representantes de cada intervalo las correspondientes marcas de clase.

El método de máxima verosimilitud, elegido para este trabajo, debe resolver el problema consistente en obtener los parámetros θ del espacio paramétrico Ω tales que hagan máxima la expresión:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_{nc}!} \prod_{i=1}^{nc} (PY_i)^{n_i}$$

$$\text{sujeto a : } \sum_{i=1}^{nc} PY_i = 1$$

donde nc es el número de intervalos (100), PYi son las probabilidades de cada uno de los 100 intervalos, que dependerán de θ , y ni es el número de individuos observados en el intervalo i-ésimo.

En el proceso de estimación, se partió de una solución inicial procedente de la estimación de los parámetros de la distribución de Dagum de tipo I para, posteriormente, obtener la solución óptima del vector paramétrico perteneciente a la distribución de Dagum de tipo I, II o III que mejor ajustara la distribución empírica. Los resultados obtenidos mediante el proceso de estimación descrito aparecen en la tabla 1.

Tabla 1
Estimaciones de los parámetros para la Familia de Dagum

	EBPF 1973-74				EBPF 1980-91				EBPF 1990-91			
Provincia	λ	β	δ	α	λ	β	δ	α	λ	β	δ	α
Alava	0,145	1,335	2,540	-0,028	0,240	0,745	3,454	-0,028	0,172	1,500	3,398	0,000
Albacete	0,051	1,515	2,353	-0,002	0,037	1,284	2,795	-0,030	0,113	0,721	3,359	-0,025
Alicante	0,060	1,663	2,649	0,000	0,113	0,913	3,011	0,000	0,132	1,180	2,947	0,000
Almería	0,044	1,136	2,843	-0,005	0,045	1,207	2,381	-0,001	0,157	0,756	2,858	-0,001
Avila	0,036	0,693	2,975	-0,050	0,050	1,277	2,476	-0,001	0,085	0,679	4,013	0,000
Badajoz	0,036	1,863	2,380	-0,008	0,035	1,198	2,599	-0,001	0,074	0,898	3,082	0,000
Baleares	0,143	0,671	3,656	-0,045	0,122	1,606	2,388	0,000	0,425	0,663	3,442	0,000
Barcelona	0,126	1,164	3,130	0,000	0,135	1,009	3,215	0,000	0,268	1,345	2,747	-0,001
Burgos	0,056	1,293	2,317	-0,001	0,203	1,118	2,944	0,000	0,242	1,203	2,747	-0,003
Cáceres	0,016	1,227	2,473	-0,001	0,043	1,109	2,736	-0,002	0,071	1,347	2,732	0,000
Cádiz	0,079	0,820	2,411	-0,024	0,083	0,666	2,944	-0,030	0,140	0,667	2,920	-0,012
Castellón	0,063	1,466	2,844	-0,001	0,102	1,014	3,240	0,000	0,142	0,658	4,314	-0,017
Ciudad Real	0,044	1,532	2,220	-0,002	0,037	0,897	2,968	0,000	0,094	0,498	3,801	-0,080
Córdoba	0,019	2,298	2,300	0,000	0,087	0,836	2,663	-0,010	0,070	1,112	2,949	-0,001
La Coruña	0,061	1,297	2,580	-0,053	0,123	0,867	2,804	-0,019	0,140	0,996	2,869	-0,015
Cuenca	0,030	1,566	2,607	-0,013	0,041	1,497	2,697	0,000	0,120	0,882	2,905	-0,039
Gerona	0,149	0,832	2,845	-0,016	0,128	0,606	3,610	-0,034	0,662	0,395	4,019	-0,163
Granada	0,028	1,424	2,340	-0,003	0,093	0,541	3,056	-0,001	0,161	0,683	3,187	-0,012
Guadalajara	0,057	1,348	2,663	-0,010	0,055	1,293	3,050	-0,008	0,099	1,655	2,675	-0,001
Guipúzcoa	0,168	0,910	2,883	-0,041	0,101	1,035	3,505	0,000	0,256	0,875	3,333	-0,001
Huelva	0,043	1,012	2,734	-0,002	0,062	1,355	2,334	-0,002	0,176	0,543	3,836	-0,040
Huesca	0,031	2,820	2,589	0,000	0,073	2,491	2,247	-0,011	0,090	1,411	3,058	-0,003
Jaén	0,012	3,109	2,214	-0,008	0,051	0,799	2,797	-0,017	0,072	0,699	3,719	0,000
León	0,035	2,544	2,163	-0,003	0,083	1,066	2,610	-0,003	0,233	0,893	3,148	0,000
Lérida	0,160	0,372	4,041	-0,134	0,122	0,772	3,541	-0,002	0,196	1,117	3,112	0,000
Logroño	0,097	0,954	3,067	-0,015	0,157	0,670	3,786	-0,012	0,143	1,116	3,142	0,000
Lugo	0,025	1,448	2,692	-0,021	0,064	1,024	3,082	0,000	0,127	0,799	3,910	0,000
Madrid	0,094	2,311	2,133	-0,006	0,147	1,501	2,330	0,000	0,233	1,307	2,849	0,000
Málaga	0,080	1,002	2,498	-0,009	0,090	0,846	3,056	-0,018	0,199	0,697	3,175	0,000
Murcia	0,027	1,601	2,618	-0,013	0,068	1,473	2,553	0,000	0,143	0,967	2,712	-0,001
Navarra	0,084	1,046	3,191	0,000	0,156	1,099	2,867	-0,001	0,414	0,815	3,560	-0,001
Orense	0,057	1,438	2,440	-0,021	0,084	0,710	3,210	-0,009	0,129	1,008	2,962	0,000
Asturias	0,070	1,265	2,881	-0,004	0,196	0,662	3,228	0,000	0,173	0,956	3,734	-0,001
Palencia	0,065	1,010	2,406	-0,050	0,177	0,858	3,071	-0,001	0,123	1,324	2,989	0,000
Las Palmas	0,121	0,817	3,050	-0,010	0,060	1,177	2,612	-0,005	0,229	0,741	3,043	-0,001
Pontevedra	0,090	0,685	2,876	-0,073	0,123	0,841	3,163	-0,003	0,115	1,010	3,397	0,000
Salamanca	0,032	1,860	2,151	-0,001	0,063	1,087	2,847	-0,001	0,086	0,944	2,959	-0,003
Tenerife	0,079	1,349	2,238	-0,010	0,039	2,069	2,299	0,000	0,131	0,819	2,987	-0,003
Santander	0,060	1,199	3,073	-0,012	0,118	1,161	2,825	0,000	0,185	0,821	3,301	0,000
Segovia	0,185	0,863	3,210	-0,025	0,038	3,126	2,269	-0,003	0,137	1,083	3,176	-0,023
Sevilla	0,068	1,189	2,495	0,000	0,068	1,306	2,472	0,000	0,156	0,909	2,765	-0,014
Soria	0,052	1,075	3,179	-0,001	0,055	1,495	2,897	0,000	0,235	0,880	3,493	-0,022
Tarragona	0,054	1,086	3,166	-0,003	0,065	1,283	2,974	0,000	0,283	0,808	3,490	0,000
Teruel	0,050	1,014	2,768	-0,008	0,139	0,354	3,918	-0,146	0,104	0,894	3,753	-0,026
Toledo	0,079	0,745	2,737	-0,059	0,055	0,644	3,444	0,000	0,045	1,125	3,443	-0,010
Valencia	0,059	1,344	2,772	-0,008	0,072	1,213	2,842	-0,004	0,143	0,990	3,175	-0,014
Valladolid	0,080	1,042	2,613	-0,009	0,135	1,239	3,039	-0,001	0,141	1,425	2,614	0,000
Vizcaya	0,100	0,913	3,437	-0,007	0,160	1,114	3,132	-0,004	0,210	1,229	2,831	0,000
Zamora	0,010	5,319	2,234	0,000	0,044	1,331	2,714	-0,006	0,098	1,314	2,857	0,000
Zaragoza	0,100	1,268	2,574	-0,012	0,205	0,795	3,034	0,000	0,215	0,705	3,793	0,000

Fuente: Elaboración propia

Considerando, en primer lugar, las estimaciones obtenidas para el total nacional (Tabla 2 y Gráfico 3), la trayectoria seguida por la distribución personal de la renta en España, a través de las estimaciones de los parámetros del modelo de Dagum, muestra las siguientes características persistentes en todo el período de estudio:

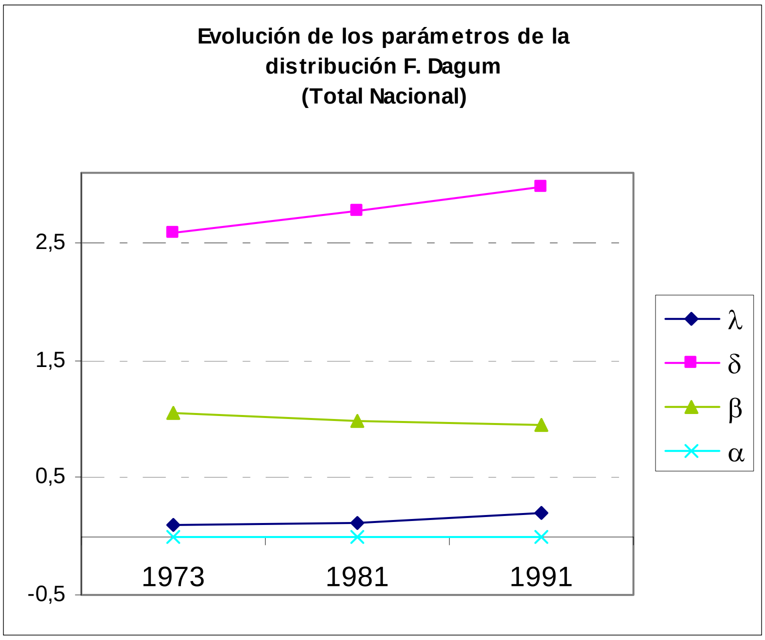
- Un aumento del parámetro de escala λ como consecuencia del aumento de la renta real disponible.
- Una disminución del parámetro de igualdad β.
- Un aumento del parámetro de igualdad δ.
- Un aumento del parámetro α, lo que indica una disminución de la renta mínima de la distribución para el caso de la distribución de Dagum tipo III.

Tabla 2

Estimaciones de los parámetros del modelo Dagum III para el total nacional

EBPF	λ	α	δ	β	Increm.	%λ	%α	%δ	%β
1973/74	0,102	-0,008	2,584	1,056	**74-81**	15,3	99,0	7,1	-6,6
1980/81	0,118	-84E-5	2,768	0,987	**81-91**	53,4	100,0	7,7	-3,4
1990/91	0,181	-99E-9	2,980	0,953	**73-91**	76,8	100,0	15,3	-9,8

Gráfico3.
Evolución de las estimaciones de los parámetros de la distribución de Dagum de tipo III para el total nacional



La evolución que sigue España en el período es la propia de un patrón de desarrollo económico que viene marcado, como señalaba Dagum en un seminario celebrado en la Universidad de Alcalá en 1994[8], por una disminución del parámetro de igualdad β y un aumento simultáneo del parámetro δ. En los trabajos empíricos de Dagum, también se comprueba que un mayor desarrollo implica este proceso de sustitución de un tipo de igualdad por otra; así se deduce para el caso de Estados Unidos (Dagum, 1980) o en una comparación transversal y longitudinal para los casos de Argentina, Estados Unidos, Canadá y Sri Lanka (Dagum, 1977a).

De acuerdo con el significado expuesto de ambos parámetros, el incremento de las estimaciones obtenidas para δ implicaría que la distribución ha sufrido un proceso de redistribución pura, reduciendo la participación de renta de los percentiles superiores y aumentando la de los inferiores. Este fenómeno ha podido producirse, entre otras causas, por la introducción de mayor progresividad en el sistema impositivo a la vez que el crecimiento económico ha permitido aumentar las rentas en general. La reforma fiscal que se diseña en 1977, y su continuación en 1983, pueden explicar el comportamiento del parámetro δ, debido al cambio de un sistema fiscal que se apoyaba más en impuestos indirectos regresivos hacia otro nuevo basado en impuestos personales y progresivos. Esta forma de redistribución parece caracterizar más a la evolución de la distribución de la renta española, en lugar de un sistema apoyado únicamente en políticas de protección social sobre capas bajas de ingresos o en mejoras generalizadas para todas las clases sociales, sin afectar significativamente al extremo superior de la distribución.

El parámetro β sufre por el contrario un descenso a lo largo del período. Un aumento de este parámetro indicaría una redistribución que mejoraría la situación de todos los percentiles de renta, con especial incidencia sobre los inferiores y medios. En el caso de España, la disminución del parámetro supondría que las políticas de redistribución basadas en transferencias a los más pobres y aumentos de gastos en servicios como vivienda, educación o sanidad, no son la clave exclusiva de la redistribución operada en este período, sino que a todas estas medidas les acompaña un

[8] En dicho seminario, Dagum señalaba que un aumento del parámetro β y una disminución de δ provocaba una fuerte polarización en la distribución y establecía como características de las distribuciones de los países en desarrollo tener un parámetro $\beta > 1$ y que $2 < \delta < 3$. Ambas condiciones se cumplían en el caso de España en 1973.

retroceso relativo de los percentiles superiores, reduciéndose a la vez la polarización de las rentas.

El parámetro de escala de la distribución de Dagum muestra un incremento a lo largo del tiempo, con más fuerza entre 1981 y 1991. Este parámetro no hace sino registrar el incremento de la renta real experimentado en España en el período de estudio, que evita el efecto pernicioso que habría supuesto la exclusiva elevación del parámetro δ, con derivada negativa con respecto a la renta media. Por tanto, el parámetro muestra, en cierto modo, cómo el crecimiento económico del período repercute en la distribución produciendo una mayor masa de renta a repartir.

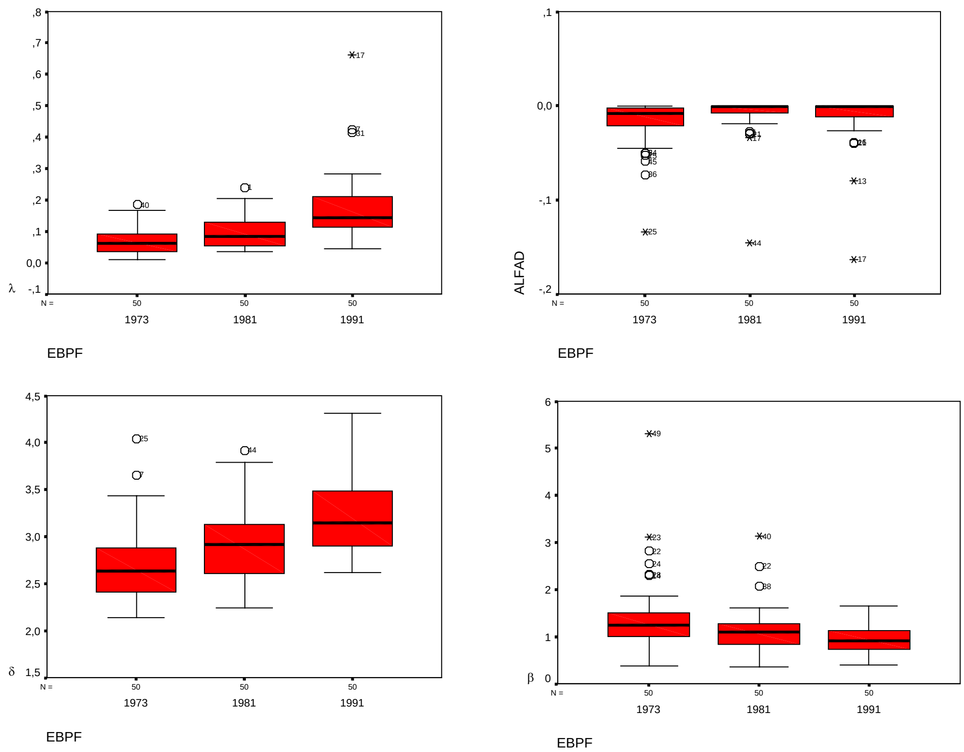
En cuanto al parámetro α relacionado con la renta mínima, su evolución indica un retroceso en cuanto a las políticas de apoyo a las clases más bajas, ya que el continuo aumento en el valor del parámetro indica que la renta mínima estimada se va reduciendo progresivamente. Esta conclusión, aparentemente sorprendente, pierde validez si tenemos en cuenta que el mínimo de la distribución puede quedar fuertemente influenciado por el mínimo muestral, más propenso a errores de observaciones extremas o a la posibilidad de que un dato aislado determine, por sí mismo, el mínimo de la distribución. Además de estas razones, y en referencia a los datos utilizados en la estimación, deben destacarse dos consideraciones sobre las limitaciones de comparabilidad de las estimaciones obtenidas para el parámetro α:

- La recogida de datos en la EBPF de 1990/91 es más rigurosa y exhaustiva que en las anteriores encuestas, lo que propicia la aparición de un número considerable de rentas disponibles negativas (consideradas nulas), circunstancia que no es apreciable en la encuesta de 1980/81 y menos en la de 1973/74.

- Los valores estimados del parámetro α son prácticamente nulos, dando lugar a una gran similitud de los modelos estimados con la distribución de Dagum de tipo I.

Considerando la evolución de las distintas provincias españolas, se obtienen, en general, los mismos resultados que para el total nacional. Así, la media de las estimaciones de los parámetros de igualdad β sufre un retroceso a lo largo de todo el período de estudio, al contrario que la media de las estimaciones de los parámetros δ, que presenta un aumento.

Gráfico 4.
Diagramas de caja correspondientes a las estimaciones de los parámetros de las distribuciones de Dagum para las provincias españolas.



En cuanto a las trayectorias seguidas por las distintas provincias, se aprecian diferencias en torno a unos tipos generales de tendencia, diferentes para cada parámetro. No se presentan los gráficos de trayectorias provinciales porque resultan confusos al considerarse 50 casos, pero una detallada observación de las diferentes estimaciones, la contabilización de los aumentos y disminuciones y el cálculo de determinados estadísticos descriptivos, que se presentan en la tabla 3, permite realizar las siguientes consideraciones:

- Respecto al parámetro de escala, se mantiene la diversidad provincial a lo largo del período con cierta convergencia entre provincias en el año 1981, donde se reduce el coeficiente de variación para luego volver en el 91 a los niveles del 73. Se producen aumentos generalizados en casi todas las provincias con respecto a la referencia temporal anterior y, en el período global, son sólo dos las provincias que experimentan un retroceso: Segovia y Toledo.

- En cuanto al parámetro δ, se observa una progresiva convergencia provincial, con una reducción continuada del coeficiente de variación en casi un 2%. Predominan, en este caso, los patrones de crecimiento, de forma más contundente en el período global donde sólo en 6 provincias disminuye el valor del parámetro δ.

- La evolución del parámetro β sigue un sentido opuesto a δ, observándose una progresiva reducción del mismo como tendencia generalizada en la mayor parte de las provincias. Esta tendencia no es tan uniforme como en el caso de δ, ya que 12 provincias mantienen un valor más alto del parámetro en 1991 que el que tenían en 1973. Sin embargo, la tendencia a la homogeneización es más intensa que en el caso del parámetro δ, observándose mayores reducciones del coeficiente de variación de las estimaciones de este parámetro.

- Respecto al parámetro α, no se observa un patrón de convergencia provincial, presentando una evolución dispar con mayores aumentos que disminuciones en 1973-1981 y la situación inversa en 1981-1991. Hay que señalar que ambas tendencias no son claramente mayoritarias. Globalmente, 36 provincias experimentan un crecimiento en el parámetro α, lo que indicaría una reducción de la renta mínima, conclusión sujeta a las limitaciones anteriormente presentadas.

Las consideraciones anteriores nos permiten concluir que las provincias españolas siguen, en general, la misma evolución que el conjunto nacional en cuanto a los parámetros de la distribución de Dagum, apreciándose además claras tendencias a la convergencia en los parámetros de igualdad, β y δ, mientras que no hay tal aproximación en el parámetro de escala. El comportamiento de α resulta errático y condicionado por los inconvenientes ya señalados.

Tabla 3.
Estadísticos descriptivos referentes a las distribuciones provinciales de los parámetros del modelo Dagum III

	Estimaciones											
	λ			δ			β			α		
Estadísticos	1973/74	1980/81	1990/91	1973/74	1980/81	1990/91	1973/74	1980/81	1990/91	1973/74	1980/81	1990/91
Media	0.070	0.097	0.172	2.705	2.915	3.226	1.395	1.126	0.961	-0.017	-0.011	-0.008
Desv. Típica	0.042	0.051	0.104	0.399	0.393	0.410	0.777	0.470	0.275	0.024	0.026	0.022
Coef. Variación	0.599	0.527	0.606	0.148	0.135	0.127	0.557	0.418	0.287	1.473	2.438	2.606
	Global	73-81	81-91	Global	73-81	81-91	Global	73-81	81-91	Global	73-81	81-91
Disminuciones	2	12	8	6	15	16	38	34	30	14	17	29
Aumentos	48	38	42	44	35	34	12	16	20	36	33	21

4. Conclusiones

Ante la falta de conexión de la modelización probabilística paramétrica de la distribución personal de la renta y el estudio económico de los causantes de la distribución, se presenta una propuesta de clasificación de parámetros de las distribuciones estadísticas, según su significado económico, que facilita la interpretación de éstos como indicadores de aspectos distributivos y efectos de determinadas políticas aplicadas sobre la distribución. La clasificación dicotómica de Dagum (escala y desigualdad) se amplía con las categorías adicionales de posición, traslación y mixtura. Dentro de la categoría de desigualdad (igualdad), pueden diferenciarse a su vez tipos de parámetros según su influencia sobre la renta media o sobre determinados percentiles (redistribuidores puros o moderados).

Esta clasificación ha permitido caracterizar los parámetros de las distribuciones Dagum, atribuyéndoles significado económico con el fin de integrarlos en modelos causales, de forma que puedan estudiarse a través de ellos los efectos de determinadas políticas económicas o factores, de todo tipo, influyentes sobre la distribución (García, 2003), o afrontar el análisis de la distribución de la renta a través del estudio de la evolución de las estimaciones paramétricas. Así, en este trabajo, se profundiza en el significado de los parámetros y en su interpretación en un caso concreto de estudio, obteniendo las características relevantes de la evolución de la distribución de la renta en España en el período 1973-1991, a partir de la información económica que contienen los parámetros.

De esta forma, se aborda el estudio causal de la distribución mediante las herramientas estadísticas que proporciona el desarrollo de la modelización paramétrica. Es en este sentido, donde se aporta una contribución al intento mencionado por Creedy (1996) de vincular modelos estadísticos y económicos.

BIBLIOGRAFÍA

Amoroso, L. (1925). "Richerche intorno alla Curva dei Redditi". Annali di Matematica Pura ed Applicata, 4(21), pp. 123-157.

Atkinson, A.B. (1970). "On the Measurement of Inequality". Journal of Economic Theory, 2, pp. 244-263.

Atkinson, A.B. (1981). Economía de la Desigualdad, Editorial Crítica. Traducción española de The Economics of Inequality. (1975). Oxford University Press.

Atkinson, A.B. y Stiglitz, J.E. (1980). Lectures in Public Economics. McGraw-Hill, Nueva York.

Bartels, C.P.A. y Van Metelen, H. (1975). “Alternative Probability Density Functions of Income”. Research Memorandum, nº. 29, Vrije University, Amsterdam.

Black, D.; Hayes, K. y Slottje, D. (1989). “Demographic Change and Inequality in the Size Distribution of Labor and Nonlabor Income”. Review of Income and Wealth, 35(3), pp. 283-296.

Bordley, R. F.; Mcdonald, J.B. y Mantrala, A. (1996). “Something New, Something Old: Parametric Models for the Size Distribution of Income”. Journal of Income Distribution, 6(1), pp. 91-104.

Callealta, F.J.; Casas, J.M. y Núñez, J.J. (1996). “Distribución de la Renta ‘per capita’ Disponible en España: Descripción, Desigualdad y Modelización”, en Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez: Distribución Personal de la Renta en España, Capítulo V, Pirámide, Madrid.

Cowell, F.A. (1995). Measuring Inequality (2ª. Edición). Harvester Wheatsheaf, Hemel Hempstead.

____ (1980). “On the Measurement of Inequality Measures”. Review of Economic Studies, 47, pp. 521-531.

Creedy, J.; Lye, J.N. y Martin, V.L. (1996). “A Labor Market Equilibrium Model of the Personal Distributions of Earnings”. Journal of Income Distribution, 6(1), pp. 127-144.

Champernowne, D.G. (1953). “A Model of Income Distribution”. Economic Journal, 63 (250), pp. 318-351.

Dagum, C. (1977). “A New Model of Personal Income Distribution: Specification and Estimation”. Economie Appliquée, 30(3), pp. 413-436.

____ (1980). “Sistemas Generadores de Distribución del Ingreso y la Ley de Pareto”. El Trimestre Económico, XLVII, 4, núm. 188, pp. 877-917.

____ (1996). “A Systemic Approach to the Generation of Income Distribution Models”. Journal of Income Distribution, 6(1), pp. 105-126.

García, C. (2003). *Factores Condicionantes y Modelos de la Distribución Personal de la Renta en España.* Tesis Doctoral. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Alcalá.

Gibrat, R. (1931). Les Inégalités Economiques. Recveil Sirey, París.

Kakwani, N.C. (1977). "Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis". Econometrica, 87, pp. 71-80.

Kakwani, N.C. y Podder, N. (1976). "Efficient Estimation of the Lorenz Curves and Associated Inequality Measures from Grouped Observations". *Econometrica*, 44, pp. 137-148.

Mandelbrot, B. (1960). "The Pareto-Levy Law, and The Distribution of Income". *International Economical Review*, 1 (2), pp. 69-106.

McDonald, J.B. (1984). "Some Generalized Functions for the Size Distribution of Income". *Econometrica*, 52, pp. 647-663.

Pena, J.B. (1996). "Los Factores Condicionantes de la Distribución Personal de la Renta y Efectos sobre la misma", en Pena, Callealta, Casas, Merediz y Núñez*: Distribución Personal de la Renta en España*, Capítulo VI, Pirámide, Madrid.

Pena, J.B., Callealta, J., Casas J.M., Merediz, A. y Núñez, J.J. (1996*). Distribución Personal de la Renta en España*. Pirámide, Madrid.

Prieto Alaiz, M. (1998). *Modelización Paramétrica de la Distribución Personal de la Renta para España mediante Métodos Robustos.* Tesis doctoral. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Valladolid.

Pudney, S. (1993). "Income and Wealth Inequality and the Life Cycle. A Non-parametric Analysis for China". *Journal of Applied Econometrics*, 8, pp. 249-276.

Rutherford, R.S.G. (1955). "Income Distributions: A New Model". *Econometrica*, 23 (3), pp. 277-294.

Sahota, G.S. (1978). "Theories of Personal Income Distribution: A Survey". *Journal of Economic Literature*, 16(1), 1-55.

Salem, A.B. y Mount, T.D. (1974). "A Convenient Descriptive Model of Income Distribution: the Gamma Density". *Econometrica*, 42, pp.1115-1127.

Sen, A. (1973). On Economic Inequality. Oxford University Press, Oxford.

____ (1976). "Poverty: An Ordinal Approach to Measurement". *Econometrica*, 44, pp. 219-231.

Shorrocks, A.F. (1980). "The Class of Additively Decomposable Inequality Measures". *Econometrica*, 48, pp. 613-625.

____ (1983). "Ranking Income Distributions". *Economica*, 50, pp. 1-17.

Silverman, B.W. (1986). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. Chapman & Hall.

Singh, S.K. y Maddala, G.S. (1976). "A Function for the Size Distribution of Incomes". *Econometrica*, 44, pp. 963-970.

Thurow, L.C. (1970). "Analyzing the American Income Distribution". *American Economic Review*, 60, pp. 261-269.